Vincent Rohart

J'entre en prépa

Les clés de la réussite en maths

- Méthodologie, conseils
- Guide de bonne rédaction
- Astuces à savoir absolument
- Les classiques incontournables
- Formulaires fondamentaux
- Des exercices d'application
- Un cahier de vacances

2e édition

ellipses

Chapitre 1 — Quelques méthodes pour réussir

Le mot *méthode* vient du grec : μετά [méta] (après/avec) + ὁδός [hodos] (chemin), mot dont la racine se retrouve dans *cathode* et *anode* en chimie, mais aussi dans *exode*. Il n'y a pas de recettes magiques qui vous transformeront en mathématicien ou mathématicienne, en revanche, on peut augmenter ses chances de réussite en empruntant quelques bons chemins.

1 Conseils généraux

On peut résumer les attentes des professeurs de classe préparatoire en ces quelques lignes.

> On attend des élèves motivés, travailleurs et prêts à s'engager pour progresser et repousser ses limites, voire les dépasser !
>
> L'idéal est bien sûr d'arriver en prépa avec des bases solides. Les professeurs n'attendent pas que vous sachiez des choses compliquées en avance : ils souhaitent plus que tout que vous maîtrisiez le calcul sur les fractions, les puissances, les équations de droites, les études de fonctions où il faut étudier le signe d'une dérivée que l'on aura auparavant factorisée, etc.

Voici de façon plus détaillée quelques conseils.

• Avoir une **bonne hygiène de vie** : dormir suffisamment (7 heures par nuit est un minimum recommandé) et donc se coucher avant minuit, faire un peu de sport chaque semaine. Dans certaines prépas, l'EPS est obligatoire : c'est une bonne chose [1].

1. Un collègue m'a encore raconté l'été dernier, dépité, que l'un de ses élèves n'a pas été reçu à l'École polytechnique à cause de l'épreuve sportive.

• Ne pas abandonner ses **loisirs** : ce serait source de déprime. Mais attention, les compétitions ou les auditions de conservatoire sont peut-être à mettre entre parenthèses pour les deux (ou trois) années de prépa.

• Travailler **régulièrement**. Il ne sert à rien de passer six heures acharnées sur son cours la veille d'un devoir ou d'une khôlle. Il faut travailler (un peu ?) chaque jour afin de bien assimiler les notions : le cerveau a besoin de temps.

• Quand on travaille, on **se coupe de toute source de distraction** : pas de notification qui va vous distraire et ancrer quelque part dans votre esprit qu'il est possible que l'on vous contacte à tout instant. On éteint le téléphone et on le range.

• À la fin de chaque journée, passer une dizaine de minutes par matière pour faire un **bilan du cours de la journée** : *qu'ai-je appris aujourd'hui ? Quels sont les résultats importants du cours ?* Il est cependant important de revenir dessus le lendemain ou deux jours après (cf. la théorie de la *courbe de l'oubli*).

• Il faut certes se reposer le week-end, mais **il ne faut pas passer des heures sur les réseaux sociaux** à regarder ces petites vidéos courtes, très amusantes certes, mais très pauvres intellectuellement, car c'est la méthode infaillible pour faire fondre inutilement son temps de travail et ainsi rater ses classes préparatoires.

• **Organiser son temps de travail**. Vous avez l'impression que les journées sont trop courtes ? Une astuce presque magique : organiser ses journées avec un agenda en ligne et programmer des créneaux horaires (et s'y tenir). Le temps ainsi dégagé est à peine croyable.

2 Apprendre ou comprendre ?

Apprend-on avant d'avoir compris, ou l'inverse ? Épineuse question : si l'on apprend sans comprendre, que va-t-on retenir ? Si l'on n'apprend pas, comment peut-on espérer comprendre ? Fait instructif : en grec ancien, le mot

$$\mu\alpha\nu\vartheta\acute{\alpha}\nu\omega$$

qui se lit `[man'tʰanō]` *signifie à la fois* j'apprends *et* je comprends. *Vous l'avez reconnu : il a donné le mot* mathématique [2]. *Ainsi, le grec nous donne la réponse : comprendre et apprendre se font simultanément.*

• **Il y a des choses qui s'apprennent sans comprendre.** Par exemple l'alphabet grec. Pourquoi α s'appelle-t-il *alpha* ? Parce que c'est une convention.

2. La racine de ce verbe est $\mu\alpha\vartheta$ `[matʰ]`, les deux ν ne sont que des ajouts (des *infixes* on dit) de la conjugaison. *Leçon* se dit $\mu\acute{\alpha}\vartheta\eta\mu\alpha$ `[matʰēma]`, même encore en grec moderne.

Exemple. Une fonction qui est dérivable et dont la dérivée est continue s'appelle une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Il n'y a rien à comprendre (si ce n'est les mots utilisés), c'est une définition.

• **Il y a des choses qui s'apprennent après se les avoir représentées**, par exemple avec un schéma, ou en se donnant un exemple. Une fois représentées, on trouve un moyen de les enregistrer de façon durable, avec des moyens mnémotechniques, ou en scandant la phrase à retenir (comme pour une récitation).

Exemple. Un théorème sur les suites dit que *toute suite réelle croissante et majorée converge*. Cette phrase doit être répétée, comme une musique, à tel point que l'oubli d'une seule syllabe doit sonner faux. Auparavant, on aura fait un dessin représentant effectivement une suite croissante, majorée, en se convaincant qu'elle a bien une limite finie (ce que veut dire *converger*).

• **Il y a des choses qui s'apprennent après les avoir démontrées**, c'est par exemple le cas des formules de trigonométrie, que l'on démontre une fois, et puis c'est tout. Il faut ensuite les retenir par cœur.

Exemple. Les deux formules de trigonométrie les plus connues sont

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b), \end{aligned}$$

valables pour tous réels a et b. On les démontre dans le cours de géométrie (grâce au produit scalaire) et on les retient ensuite grâce au moyen mnémotechnique suivant

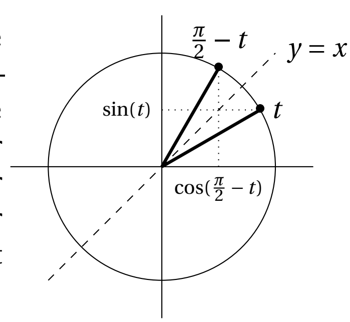
— <u>co</u>sinus = <u>non</u> mélange, <u>non</u> respect,

— sinus = mélange, respect.

En effet, dans la formule donnant $\cos(a+b)$ les fonctions cos et sin ne se mélangent pas, et le signe + devient − : il n'y a pas respect du signe. C'est le contraire pour $\sin(a+b)$.

• **Il y a des choses qui ne s'apprennent pas par cœur, on les retrouve rapidement en cas de besoin**.

Exemple. Une formule de trigonométrie dit que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$ pour tout réel t. Plutôt que d'apprendre par cœur cette importante relation et de risquer de se tromper, mieux vaut toujours dessiner mentalement un cercle trigonométrique, de placer les angles t et $\frac{\pi}{2} - t$, et de constater une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$: les abscisses et les ordonnées sont donc échangées.



3 Travailler son cours

De façon simplifiée, un cours de mathématiques est un ensemble de définitions, parfois motivées par des situations rencontrées en physique, de théorèmes avec leurs démonstrations et d'exemples d'application.

• Il faut apprendre son cours avec une feuille de **brouillon**. Refaire les démonstrations sur le brouillon, pour vérifier que toutes les étapes sont comprises. Refaire sur le brouillon les exemples du cours.

• Un théorème s'apprend avec ses **hypothèses**, et pas seulement la formule qui vient à la fin. Si vous voulez sortir du lot, vous démarquer des autres, impressionner la personne qui vous évaluera, et par conséquent gagner des points au concours : appliquez cette consigne.

• Privilégier la mémorisation des **étapes/idées clés** dans les démonstrations, plutôt que l'apprentissage brutal : il faut synthétiser, réduire, compresser et ne retenir que les idées articulantes d'une preuve. C'est cela dont vous aurez besoin plus tard dans votre vie professionnelle.

• On doit absolument comprendre **l'architecture du cours**, des chapitres, pourquoi telle notion est utile pour telle autre ? Pourquoi ce lemme avant ce théorème ? Pour arriver à quoi ? Au fait, le titre du paragraphe, c'était quoi ?

• Faire des **fiches-bilan** : y inscrire le plan du cours, les théorèmes importants, les méthodes clés. Il est important de les faire soi-même : c'est leur conception qui permettra à votre cerveau de bien mémoriser. Relire les fiches deux-trois jours après, comme expliqué plus haut.

• Un bon conseil : numéroter toutes ses copies de cours, ses TD, pour pouvoir les remettre dans l'ordre sans problème en cas d'accident.

• Allez, on vous livre le plus secret des trucs pour réussir : réquisitionnez votre petit frère, cousin, neveu, copain/copine ou nounours et faites-lui un mini cours de maths sur les notions apprises. Si vous êtes capable de le faire, **si vous savez jouer le prof**, c'est bon, c'est dans la boîte ! Une citation traditionnellement attribuée à A. Einstein dit : « si vous ne pouvez pas expliquer quelque chose à un enfant de six ans, c'est que vous ne l'avez pas compris ».

4 Chercher ses exercices de TD (travaux dirigés)

Les séances d'exercices sont faites pour assimiler le cours au travers d'exercices progressifs choisis par votre professeur. Il n'est pas exagéré de dire que chercher ses exercices de TD est la principale activité en mathématiques.

• Vous devez préparer les exercices de TD demandés à l'avance, voire en faire un peu plus si vous le pouvez. Venir en TD sans avoir travaillé (et pire encore : ne pas avoir appris son cours) est une pure perte de temps. Vous subirez passivement la correction, penserez avoir compris quelque chose, mais il ne restera que très peu de choses le jour du DS. Ne parlons pas du jour du concours.

• Utiliser un **cahier de brouillon** (s'en procurer une petite dizaine avant la rentrée) : c'est l'arme absolue des mathématiciens (qui l'échangent volontiers contre un tableau, il est vrai). Souvent, les élèves n'osent pas écrire par peur de se tromper. Le travail en mathématiques se fait par l'erreur : on essaie, on se trompe, on recommence, on change de piste.

• **Ne pas abandonner** si l'on ne trouve pas tout de suite : sinon prenez un livre de 5ᵉ si vous avez envie de faire des exercices résolus sans effort. Comme dans un entraînement de natation, il faut que ça « pique » un peu, que cela vous sorte de votre zone de confort. Repérer quelle notion du cours cela fait intervenir. Ressasser les méthodes connues, et la grande clé de la réussite : savoir changer de chemin de raisonnement quand celui-ci n'aboutit pas. C'est bien plus difficile qu'on ne le croit.

• Certains petits malins vont chercher les solutions des exercices de TD dans des livres, ou sur le net/l'IA. Ils lisent donc la solution, comprennent, et ont l'impression d'avoir travaillé. Eh bien, que pensez-vous d'un type qui regarde une finale de 200 m papillon à la télé ? Oui effectivement on plonge au départ, on tourne les bras, arrivé au mur on tourne. Question : cette personne sait-elle nager un 200 m papillon ? Je suis sûr que vous avez compris l'analogie.

5 Préparer une khôlle (interrogation orale)

• C'est un exercice oral : vous devez parler clairement, en exposant des idées simples et construites. Toute tentative de bluff est à proscrire. Un ton respectueux (sans tomber dans la flagornerie) est de mise : on ne souffle pas, on n'interrompt pas l'examinateur, on ne critique pas le choix des questions.

• On écrit lisiblement, ni trop gros (car peu de tableau), ni trop petit (l'examinateur fatigue vite, surtout le soir). On n'efface pas son tableau avant de s'être assuré que l'examinateur l'ait vu. On détaille ses calculs, l'examinateur n'a pas à le faire pour vous !

• Une khôlle commencera toujours par une **question de cours** : ne pas savoir y répondre vous assure souvent une note inférieure à 10/20.

• Bien sûr le but est de résoudre les exercices proposés. On veut aussi **voir si les méthodes sont sues**, alors montrez que vous les connaissez, et expliquez les idées que vous avez en tête même si elles n'aboutissent pas. Vous seriez surpris de voir qu'on peut avoir une très bonne note sans avoir tout fait.

6 Chercher ses DL (devoirs en temps libre, dits « maison »)

• **Bien commencer à l'avance**. Les DL sont des devoirs de recherche approfondie, ils ne se cherchent pas la veille ! C'est un travail essentiel qui vous apportera une expérience précieuse des sujets de concours.

• **Ne pas recopier** ce qu'a fait le camarade (ou l'IA), surtout quand on ne comprend pas ce que l'on recopie : votre professeur le voit immédiatement. Vous risquez non seulement d'avoir 0, mais pire : votre professeur pourrait juger inutile de perdre son temps à vous corriger.

• **Soigner** au maximum figure, courbe, programme. Vous avez largement le temps.

• Rendre un DL **complet** si possible, surtout un DL de vacances.

7 Réussir ses DS (devoirs surveillés)

• Maintenant, les concours scannent les copies des épreuves d'admissibilité. En conséquence, tous les correcteurs type ***blanco* et compagnie sont strictement interdits**. L'effaceur de stylo plume est autorisé, mais certains concours imposent le stylo bille, voire imposent la couleur noire, plus lisible. Prenez l'habitude dès maintenant : abandonnez vos *blanco* qui laissent des pâtés infâmes, des croûtes blanches épaisses qui rigidifient la page. Vous prenez une règle, vous tirez un trait (inutile de faire un damier, les professeurs savent ce que signifie un texte barré) et vous gagnerez du temps et une copie propre : magique.

• Numéroter ses copies au format n/N (où N est le nombre total de copies). Cette tâche est obligatoire et doit être faite **pendant** l'épreuve, pas quand le professeur/le surveillant annonce qu'il faut cesser d'écrire. Attention : aux épreuves d'admissibilité, continuer d'écrire, ne serait-ce que pour apposer son nom, peut être disqualifiant.

• Assurer un maximum de points faciles en sachant répondre – rapidement – aux questions de cours.

• Écrire lisiblement (pas d'encre bleu clair coupée à l'eau), sans faute de français, avec une marge, en encadrant les résultats à la règle afin que le correcteur soit bien disposé en prenant votre copie : dans beaucoup de concours, des malus sont prévus pour les copies trop mal tenues.

• Ne pas rendre une copie « jeu de piste » : traiter le plus possible les exercices dans l'ordre, ou en tout cas ne pas éparpiller un même exercice sur plusieurs endroits : on n'est pas là pour mener une chasse au trésor.

• Gérer son temps : il n'est pas rentable de passer 35 minutes sur une question. On passe, en disant que l'on admet ce résultat.

• Bannir le bluff : votre correcteur/trice est bilingue français-maths, il/elle est de plus habitué(e) aux copies d'élèves. Restez honnête, même si vous êtes tenté(e) de conclure par un « on voit bien que ».

Exemple (lu sur une copie d'élève). « *Plus n est grand, par un raisonnement logique, plus les images de la fonction sont grandes. Ainsi, plus n augmente, plus u_n augmente. Ainsi, la suite (u_n) est croissante.*

→ Où est ce fameux raisonnement logique ?

• Dans le même registre, on évite les « c'est évident » ou les « on a logiquement » qui font sourire les correcteurs.

• Se contrôler : on n'écrit pas des choses qui ne veulent rien dire. Il faut se relire !

Exemple (lu sur une copie d'élève). « *Ainsi, les nombres a et b ne sont pas réels entre eux.* »

→ L'élève voulait-il parler de « nombres entiers premiers entre eux » ?

• Être **concis**. Beaucoup de questions ne demandent qu'une voire deux lignes, pas plus. On n'est pas mieux noté(e) quand on rédige une demi-page pour démontrer que la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

8 Répondre aux questions posées

Le titre de ce paragraphe vous semble peut-être incongru. Pourtant, beaucoup d'élèves ne répondent pas correctement aux questions posées. Donnons des exemples.

Question 1. *Quelles sont les solutions de $x^2 = 3$ dans $\mathbb{R}$?*

Exemple de mauvaise réponse. $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Plusieurs remarques. Premièrement, la question est posée en français, on attend donc une réponse en français. Celle-ci doit commencer par « *les solutions de* $x^2 = 3$ *sont (...)* ». Ensuite, on demande les solutions d'une équation dans $\mathbb{R}$, on attend donc des nombres, et l'élève donne... un ensemble [3].

Une bonne réponse. Les solutions de $x^2 = 3$ sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Question 2. *Comment définit-on la partie entière (par défaut) d'un réel ?*

Exemple de mauvaise réponse 1. C'est quand $n \leqslant x < n+1$.

Outre le fait que « c'est quand » est du registre familier, la phrase ne répond pas à la question. De plus, que représentent les lettres x et n ?

Exemple de mauvaise réponse 2. C'est $\lfloor x \rfloor$.

Ici, on n'explique rien, on ne sait toujours pas comment est définie la partie entière d'un réel. On ne sait même pas qui est ce x. La réponse donne seulement une *notation*.

Une bonne réponse. La partie entière (par défaut) d'un réel x est l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier se note $\lfloor x \rfloor$.

Question 3. *Quand dit-on qu'un triangle est rectangle ?*

Exemple de mauvaise réponse. Un triangle est rectangle quand le carré d'un de ses côtés vaut la somme des carrés des deux autres.

On demande une définition, pas un théorème caractérisant les triangles rectangles. Bien que la réponse ait une syntaxe correcte, et soit logiquement juste, elle ne correspond pas à la question posée.

Une bonne réponse. Un triangle rectangle est un triangle dont l'un des angles est droit.

9 Quel matériel acheter pour la rentrée ?

• Des cahiers de brouillons, beaucoup !

• Nul besoin d'acheter une super calculatrice qui coûte cher : non seulement on ne se sert pas de calculatrice en maths [4], mais pire encore : elle est interdite aux concours. Et la physique vous me direz ? Oui, on s'en sert un peu plus. Très modestement. La calculatrice que vous avez au lycée suffira certainement.

• Il est préférable d'opter pour le classeur car le cours est très volumineux. Dans ce cas, numérotez bien vos feuilles. Mais certains préfèrent des cahiers : vous êtes grands, faites ce que vous voulez en accord avec les exigences de vos professeurs, s'ils en ont.

3. Ou plus exactement, il répond une égalité, ce qui est encore pire.
4. Personnellement, je n'en ai même pas.

Chapitre

2 Un peu de logique

1 Assertions et prédicats

• Une **assertion** est une phrase (mathématique) pouvant être vraie, ou fausse. Dans le langage courant, on parlerait *d'affirmation*. Par exemple, l'affirmation « $2+3=7$ » est une assertion, et elle est fausse. En revanche, « $2+3$ » n'est pas une assertion, cet assemblage (suite de symboles) désigne l'entier naturel 5, et 5 n'est ni vrai ni faux.

On désigne en général les assertions par des lettres rondes telles $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, etc. Pour dire que $\mathscr{A}$ est une assertion vraie, on peut noter $v(\mathscr{A})=1$. Sinon, on notera $v(\mathscr{A})=0$. On dit que $v(\mathscr{A})$ est la *valeur de vérité* de $\mathscr{A}$.

Dans la logique classique, celle utilisée couramment en mathématiques, une assertion possède toujours une et une seule valeur de vérité : 0 ou 1 (c'est le principe du *tiers exclu*). Il existe d'autres formes de logique ou les valeurs de vérité peuvent décrire tout l'intervalle $[0,1]$: c'est le cas de la logique floue, par exemple. En classe préparatoire, nous n'utiliserons que la logique classique.

• Un **prédicat** est une assertion dépendant d'un ou plusieurs paramètres. Par exemple, pour tout réel a on peut considérer l'assertion

$$\mathscr{A}(a) : \text{« l'équation } x^2 = a \text{ admet au moins une solution dans } \mathbb{R} \text{ ».}$$

L'assertion $\mathscr{A}(3)$ est vraie, mais l'assertion $\mathscr{A}(-1)$ est fausse.

Un prédicat toujours vrai, quels que soient ses paramètres, s'appelle une **tautologie**. La tautologie la plus simple est certainement « $x=x$ ». À l'inverse, un prédicat toujours faux s'appelle une **antilogie**.

• Pour noter que deux assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ont même valeur de vérité, on écrit $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$. Cela ne veut pas dire que les deux assertions sont identiques, mais seulement qu'elles sont **logiquement équivalentes**.

Exemple. Pour tout réel a, notons $\mathscr{P}(a)$ l'assertion « $a \in \mathbb{R}_+$ ». Alors, pour tout réel a, $\mathscr{A}(a) \equiv \mathscr{P}(a)$, où $\mathscr{A}(a)$ est l'assertion de l'exemple précédente.

2 Les connecteurs ¬ (non), ∨ (ou), ∧ (et)

• Si $\mathscr{A}$ est une assertion, nous noterons $\neg\mathscr{A}$, ou parfois $\texttt{non}(\mathscr{A})$, la **négation** de l'assertion $\mathscr{A}$: c'est une assertion dont la valeur de vérité est 0 si celle de $\mathscr{A}$ est 1, et réciproquement.

Exemple. Si $\mathscr{A}$ est l'assertion « $x = 2$ », alors $\neg\mathscr{A}$ est l'assertion « $x \neq 2$ ».

On remarquera [1] que $\neg\neg\mathscr{A} \equiv \mathscr{A}$. Une analogie dans le langage courant est par exemple « ne pas être méchant » ≡ « être gentil ».

• Considérons deux assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. Nous définissons une nouvelle assertion, notée $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$, ou plus simplement $\mathscr{A}\ \texttt{ou}\ \mathscr{B}$, qui est vraie si et seulement si l'une au moins des deux assertions est vraie. C'est la **disjonction** de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

Exemple. Pour qu'un élève puisse rentrer dans le lycée, l'assertion suivante doit être vraie.

« L'élève a sa carte de lycéen *ou* son carnet de correspondance. »

Bien sûr, s'il a les deux, l'élève peut rentrer dans le lycée.

ATTENTION !

En français, le *ou* peut avoir deux sens :

— le *ou inclusif*, comme celui de l'exemple précédent,

— le *ou exclusif*, celui du restaurant quand le menu indique « fromage *ou* dessert ». On peut donc le traduire par *ou bien ... ou bien*.

Le *ou* utilisé couramment en mathématiques est le *ou inclusif*. Toutefois, le *ou exclusif* existe aussi !

1. C'est une conséquence du principe du tiers exclu. Ce principe est remis en cause dans certaines branches de la logique. On ne les évoquera pas dans un cours de classe préparatoire.

Syntaxe mathématique. En français, on peut se permettre de « mettre en facteur » certaines parties de phrases pour éviter les répétitions. Par exemple, on dira

« Le nombre x vaut 2 ou 3. »

Cette façon de parler est **totalement proscrite** en mathématiques. Ainsi, on écrira

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

mais **jamais** $\cancel{x = 2 \text{ ou } 3}$.

• Considérons deux assertions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. Nous définissons une nouvelle assertion, notée $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$, ou plus simplement $\mathscr{A}\,\texttt{et}\,\mathscr{B}$, qui est vraie si et seulement si les deux assertions sont vraies toutes deux. C'est la **conjonction** de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

Exemple. Pour qu'un individu français puisse voyager aux États-Unis, l'assertion suivante doit être vraie.

« L'individu a un passeport *et* un visa. »

Si l'une des assertions est fausse, autrement dit, si l'individu n'a qu'un passeport ou n'a qu'un visa, il ne pourra pas voyager aux États-Unis. Disons-le autrement : un individu ne peut pas voyager aux États-Unis quand

« l'individu n'a pas de passeport *ou* qu'il n'a pas de visa. »

Le *ou* ci-dessus est bien un *ou inclusif*. Sur cet exemple, on a montré l'importante relation entre les connecteurs ∨, ∧ et ¬ connue sous le nom de *règle de De Morgan* [2].

Règle *(de De Morgan)*
Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux assertions, alors

$$\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \equiv (\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\mathscr{B}).$$

Cette relation peut se retenir en disant familièrement que le « *ou* est le contraire du *et* », mais cette façon de voir les choses est très imprécise.

Pour démontrer cette règle, nous allons utiliser des *tables de vérité*, en listant tous les cas possibles.

2. Auguste De Morgan (1806-1871), mathématicien et logicien britannique.

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$	$\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\neg\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{B}$	$(\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\mathscr{B})$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Dans tous les cas, $\neg(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \equiv (\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\mathscr{B})$ et notre règle est démontrée. Une conséquence immédiate est alors le résultat suivant.

Règle bis *(de De Morgan)*
Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux assertions, alors

$$\neg(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \equiv (\neg\mathscr{A}) \wedge (\neg\mathscr{B}).$$

On peut bien sûr le démontrer comme précédemment, à l'aide de tables de vérité. Toutefois, il est plus rapide et plus élégant d'utiliser le premier théorème directement sur les assertions $\neg\mathscr{A}$ et $\neg\mathscr{B}$. On obtient alors

$$\neg(\neg\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B}) \equiv (\neg\neg\mathscr{A}) \vee (\neg\neg\mathscr{B}) \equiv \mathscr{A} \vee \mathscr{B}.$$

En prenant la négation, on prouve alors notre règle bis.

Syntaxe mathématique. Au lieu d'écrire $x + y = 1 \;\wedge\; 2x - y = 5$, on écrit plus couramment

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1, \\ 2x-y & = & 5. \end{array}\right.$$

On appelle cela un *système d'équations.* Il n'y a pas de notation analogue pour la disjonction. Certains notent

$$\text{ou}\left[\begin{array}{rcl} x+y & = & 1, \\ 2x-y & = & 5. \end{array}\right.$$

Règle *(distributivité)*
Si $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des assertions, alors

$$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C} \;\equiv\; (\mathscr{A} \wedge \mathscr{C}) \vee (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}).$$

De façon similaire, $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vee \mathscr{C} \;\equiv\; (\mathscr{A} \vee \mathscr{C}) \wedge (\mathscr{B} \vee \mathscr{C})$.

Ainsi, ∧ se « distribue » sur ∨ comme la multiplication sur l'addition. Chose étonnante, ∨ se distribue aussi sur ∧, pourtant l'addition ne se distribue pas sur la multiplication !

Pour démontrer ce fait, une table de vérité fera l'affaire. On remarque que chacune des assertions $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ peuvent avoir deux valeurs de vérité : 0 ou 1. Ainsi, il y a $2^3 = 8$ cas à distinguer. Il est judicieux de les ranger en comptant en base 2 pour ne pas en oublier.

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{C}$	$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$	$(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C}$	$\underbrace{\mathscr{A} \wedge \mathscr{C}}_{(*)}$	$\underbrace{\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}}_{(**)}$	$(*) \vee (**)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Les assertions concernées sont bien logiquement équivalentes. Pour la 2^e^ distributivité, on peut faire une nouvelle table de vérité, mais il est encore une fois plus rapide et plus élégant d'appliquer ce qui précède aux assertions $\neg\mathscr{A}$, $\neg\mathscr{B}$ et $\neg\mathscr{C}$:

$$(\neg\mathscr{A} \vee \neg\mathscr{B}) \wedge \neg\mathscr{C} \;\equiv\; (\neg\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{C}) \vee (\neg\mathscr{B} \wedge \neg\mathscr{C}),$$

et de considérer la négation, en appliquant les règles de De Morgan, ce qui donne

$$(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vee \mathscr{C} \;\equiv\; (\mathscr{A} \vee \mathscr{C}) \wedge (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}).$$

Exemple. On veut résoudre le système d'équations suivant dans $\mathbb{R}$.

$$(\mathrm{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 5x + 4 &=& 0, \\ (x-1)(x+2) &=& 0. \end{array} \right.$$

Soit x un réel. Puisque l'on sait que $(x-1)(x+2) = 0$ équivaut à $(x = 1) \vee (x = -2)$, ce qui précède montre que (S) équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 5x + 4 &=& 0, \\ x &=& 1 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 5x + 4 &=& 0, \\ x &=& -2 \end{array} \right.$$

ou encore à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 &=& 0, \\ x &=& 1 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{rcl} 10 &=& 0, \\ x &=& -2, \end{array} \right.$$

et finalement à $x = 1$. Ainsi, la seule solution de ce système est 1.

3 Le maltraité connecteur $\Longrightarrow$

• Parmi les symboles mathématiques les plus mal utilisés se trouve certainement le connecteur $\Longrightarrow$. Précisons tout de suite les pièges dans lesquels ne pas tomber.

ATTENTION !

- Le symbole $\Longrightarrow$ ne sert pas pour marquer un retour à ligne. Ce n'est pas non plus une marque de début de phrase (comme le • en début de cette ligne).
- Le symbole $\Longrightarrow$ ne veut pas dire *donc*. En particulier, ce n'est pas une abréviation pour les prises de notes.

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux assertions, on va créer une nouvelle assertion, que l'on notera $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$, qui pourra se lire « si $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{B}$ ».

Il est plus facile de considérer sa négation : comment traduire le fait que $\mathscr{A}$ n'implique pas $\mathscr{B}$? La réponse est évidente : quand on peut avoir $\mathscr{A}$ sans pour autant avoir $\mathscr{B}$, autrement dit quand $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B}$.

Exemple. Pourquoi le fait d'avoir son Bac n'implique pas le fait d'avoir eu 20 en maths ? Parce qu'on peut avoir son Bac et ne pas avoir eu 20 en maths !

Ainsi, l'assertion $\neg(\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B})$ se présente naturellement comme étant l'assertion $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B}$. Cela donne finalement une définition convenable pour $\Longrightarrow$: l'assertion $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ désignera l'assertion $\neg(\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B})$. D'après les règles de De Morgan vues précédemment, on pose finalement la définition suivante.

Définition

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux assertions, on notera $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ l'assertion $(\neg\mathscr{A}) \vee \mathscr{B}$. On dira que $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est une *implication*.

- L'assertion $\mathscr{A}$ s'appelle la *prémisse* (ou *protase*, en grammaire).
- L'assertion $\mathscr{B}$ s'appelle la *conclusion* (ou *apodose*, en grammaire).

L'assertion $\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A}$ s'appelle *l'implication réciproque* de $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$.

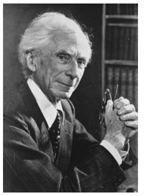
En général, si $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est vraie, l'implication réciproque $\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A}$ n'a aucune raison de l'être.

Exemple. Si l'on pose $\mathscr{A}$: « je suis très malade » et $\mathscr{B}$: « je ne vais pas au lycée », l'implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est vraie, mais sa réciproque ne l'est pas !

• **Table de vérité du connecteur $\Longrightarrow$.** Puisque $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ n'est autre que l'assertion $\neg\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$, il est facile de dresser la table de vérité de l'implication.

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\neg\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Table de vérité du connecteur $\Longrightarrow$



Bertrand RUSSELL

(1872-1970)

On constate la bizarrerie suivante : si la prémisse $\mathscr{A}$ est fausse, l'implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est **toujours vraie**, que $\mathscr{B}$ soit vraie ou fausse ! Ce phénomène a été expliqué par le logicien B. Russell, quand l'un de ses étudiants lui avait demandé, surpris : « mais alors, en partant de quelque chose de faux, par exemple $0 = 1$, on peut démontrer correctement n'importe quoi, par exemple que vous êtes le Pape ? ». Le logicien, amusé, avait confirmé, et avait démontré l'implication de l'étudiant de la façon suivante.

— Si $0 = 1$, alors en ajoutant 1 de chaque côté, j'obtiens $1 = 2$.
— Considérons le Pape et moi : ce sont deux personnes, mais je viens de dire que $2 = 1$, donc ces deux personnes n'en font qu'une.
— En conclusion, je suis le Pape.

Ici $\mathscr{A}$ est fausse, $\mathscr{B}$ aussi, mais pourtant l'implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est vraie : la démonstration qui permet de « passer » de $\mathscr{A}$ à $\mathscr{B}$ est correcte[3].

• **Le symbole $\Longrightarrow$ ne signifie pas *donc*.** Examinons l'exemple précédent en remplaçant $\Longrightarrow$ par *donc* ; on obtient

« $0 = 1$ **donc** je suis le Pape. »

On passe alors pour un fou : non seulement on affirme que $0 = 1$, mais en plus on dit qu'on est le Pape. L'exemple de Russell se lit correctement

« **si** $0 = 1$, **alors** je suis le Pape, »

ce qui est radicalement différent ! Pensez à la célèbre maxime *avec des « si », on mettrait Paris en bouteille*.

On comprend maintenant que l'expression $\mathscr{A}\,\mathtt{donc}\,\mathscr{B}$ désigne en fait l'assertion $\mathscr{A} \wedge (\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B})$. Si elle est vraie, alors $\mathscr{B}$ est vraie aussi. Les Anglo-Saxons utilisent le symbole $\therefore$ pour dire *donc*. En France, il n'est pas en usage.

3. Je tais ici les subtilités de la théorie de la démonstration.

• **La contraposée d'une implication**. On rencontre ce terme dans les classes de collège quand on parle de la contraposée du théorème de Pythagore. Rappelons ce dernier.

« Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$. »

On présente alors un triangle ABC dont les côtés valent $BC = 3$, $BA = 2$ et $AC = 1$. On calcule $BA^2 + AC^2 = 5$ qui n'est pas égal à $BC^2 = 9$. Les élèves en déduisent, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, que ABC n'est pas rectangle en A.

Définition

Considérons $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux assertions. On appelle *contraposée* de l'implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$, l'implication $\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}$.

Il se trouve qu'une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes. Nous allons le prouver en dressant la table de vérité de $\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}$.

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\neg\mathscr{A}$	$\neg\mathscr{B}$	$\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

On reconnaît bien la table de vérité de $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$. En conclusion, on retiendra **qu'une implication est logiquement équivalente à sa contraposée**.

Exemple. Soit n dans $\mathbb{N}$. Démontrer par contraposée que si n^2 est impair, alors n est impair lui aussi.

La contraposée de l'implication à prouver est « si n est pair, alors n^2 est pair aussi », ce qui est beaucoup plus facile à montrer ! En effet, si n est pair, alors on dispose d'un entier k tel que $n = 2k$. Mais alors, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, donc n^2 est pair – car c'est un multiple de 4 (donc de 2).

Pour comprendre l'intérêt du raisonnement par contraposée, on invite le lecteur ou la lectrice à démontrer la propriété de l'exemple précédent par implication directe : une fois que vous aurez posé $n^2 = 2k + 1$ avec k dans $\mathbb{N}$, que ferez-vous pour obtenir n ? Prendre la racine carrée ? Bon courage !

4 L'équivalence $\Longleftrightarrow$

Par définition, si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux assertions, on note $\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}$ l'assertion

$$(\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A}).$$

On écrit aussi « $\mathscr{A}$ si et seulement si $\mathscr{B}$ ». La table de vérité du connecteur $\Longleftrightarrow$ est alors facile à obtenir :

$\mathscr{A}$	$\mathscr{B}$	$\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$	$\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{A}$	$\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

On constate donc que $\mathscr{A} \Longleftrightarrow \mathscr{B}$ est vraie quand $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$, et seulement dans ce cas.

• **Quand utiliser des équivalences ?** Très souvent pour résoudre des équations. En effet, résoudre une équation c'est la transformer en une équation plus simple dont les solutions seront les mêmes que l'équation de départ.

Exemple 1. Résoudre $2x+1=3$ dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$2x+1=3 \Longleftrightarrow 2x=3-1 \Longleftrightarrow x=\frac{2}{2},$$

et la dernière équation est très simple à résoudre : il n'y a qu'à lire ! L'unique solution est 1. On remarque que l'on a bien raisonné par équivalences car,

— *si* $2x+1=3$, *alors* $2x+1-1=3-1$: on a retranché 1 de chaque côté de l'égalité.
— Réciproquement, *si* $2x=2$, *alors* $2x+1=2+1$: on a ajouté 1 de chaque côté de l'égalité.
— De même pour la deuxième équivalence.

Exemple 2. Résoudre $\ln(x^2+1)=3$ dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\ln(x^2+1)=3 \Longleftrightarrow x^2+1=\mathrm{e}^3 \Longleftrightarrow x^2=\mathrm{e}^3-1 \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{\mathrm{e}^3-1}.$$

On a ainsi résolu notre équation qui a deux solutions : $\sqrt{\mathrm{e}^3-1}$ et $-\sqrt{\mathrm{e}^3-1}$. Ceci est bien justifié car $\mathrm{e}^3-1 \geqslant 0$.

L'exemple précédent nous montre, dans le cas général, que si f est une **bijection** [4] on peut écrire, quels que soient a et b dans l'ensemble de définition de f,

$$a=b \Longleftrightarrow f(a)=f(b).$$

4. Le cours de mathématiques vous apprendra qu'être bijective est suffisant, mais pas nécessaire pour que cette équivalence soit vraie. Ce sera l'occasion d'apprendre la notion de fonction *injective*.

Bien que le sens direct soit valable même si f n'est pas une bijection, l'autre sens, lui, est faux en général. On rappelle que les bijections les plus connues vues en Terminale sont

- La fonction exp (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$) et sa réciproque : ln.
- Les fonctions affines $x \mapsto ax+b$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) si $a \neq 0$. Sa réciproque est la fonction affine $y \mapsto \frac{1}{a}(y-b)$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ (de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$), qui est sa propre réciproque.

ATTENTION !

L'équivalence $a = b \iff f(a) = f(b)$ est mise à mal avec la fonction carré $f : x \mapsto x^2$. En effet, $(-3)^2 = 9 = 3^2$ pourtant $-3 \neq 3$, par exemple. Plus généralement, si a et b sont deux réels,

$$a^2 = b^2 \iff a^2 - b^2 = 0 \iff (a-b)(a+b) = 0 \iff (a = b \vee a = -b).$$

• **Quand ne peut-on pas utiliser des équivalences ?** Quand on applique, dans une égalité, une fonction qui n'est pas une bijection, par exemple élever au carré, prendre le cosinus, etc. Alors comment faire quand on ne peut raisonner par équivalences successives ? On met en place un raisonnement par analyse-synthèse : cf. paragraphe 6.

5 Le raisonnement par l'absurde

Très souvent confondu avec le raisonnement par contraposée, le raisonnement par l'absurde est un outil très ancien dans les démonstrations mathématiques. Il a pour objet de démontrer une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$. Son principe est de supposer que $\mathscr{A}$ est vraie tout en supposant que $\mathscr{B}$ est fausse puis d'en déduire une contradiction.

En effet, nous avons vu au paragraphe 3 que le seul cas où $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est fausse est justement le cas où $\mathscr{A}$ est vraie et $\mathscr{B}$ fausse.

Exemple non mathématique. Considérons l'implication

« je suis allé aux États-Unis par avion » $\Longrightarrow$ « j'ai un passeport à jour ».

Si nous souhaitions démontrer par l'absurde cette implication, nous dirions : *Supposons que je sois allé aux États-Unis par avion, et imaginons un instant que je n'aie pas de passeport à jour ; quand j'étais à l'aéroport, j'ai dû montrer mon passeport, et comme celui-ci n'est pas à jour, j'ai nécessairement été refusé à bord. Ceci est absurde, puisque je suis bien allé aux États-Unis par avion. En conclusion, mon passeport est bien à jour.*