

ECG

MATHS APPROFONDIES



À VOS MATHS

12 ANS *de sujets*

*posés au concours EDHEC
exercices et problèmes corrigés*

11^e
édition
actualisée
+ Python

CONSEILS de MÉTHODE
CONSEILS de RÉDACTION
AIDE à la RÉOLUTION
LISTE DES FAUTES à ÉVITER
CONTRE-EXEMPLES SIMPLES

Sylvain RONDY



Avant-propos

Voici la onzième édition de À VOS MATHS : elle contient les épreuves du concours EDHEC posées entre 2014 et 2025, toutes adaptées au nouveau programme entré en vigueur à la rentrée 2021 et opérationnel dès le concours 2023. Chaque énoncé est suivi de conseils (méthode, rédaction, etc.), ainsi que de son corrigé et du barème.

Les corrigés sont rédigés de façon très détaillée (ils ne sont pas des modèles de copie car ils contiennent des indications destinées à bien faire comprendre au lecteur comment se dessine la solution) et la rubrique de conseils est très fournie : conseils de méthode, conseils de rédaction, aide à la résolution et liste des fautes à éviter, assortie de contre-exemples simples.

Cet ouvrage n'est donc pas un simple recueil d'annales mais un outil précieux d'aide à la réflexion.

Outre la table des matières, le lecteur trouvera au début de cet ouvrage plusieurs tableaux assez utiles : un tableau thématique indiquant dans quelle épreuve on peut trouver tel ou tel thème, un tableau permettant de repérer les exercices accessibles aux étudiants de première année, et enfin un tableau proposant un timing pour chaque épreuve.

Cet ouvrage est destiné en tout premier lieu aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles de commerce et de management de l'option mathématiques approfondies, qu'ils soient en première ou en deuxième année, mais pourra également intéresser les étudiants de L1-L2 dont le cursus contient des mathématiques.

L'épreuve de mathématiques du concours d'entrée à l'EDHEC est présentée par un très grand nombre de candidats, c'est l'une des épreuves comptant le plus grand nombre d'inscrits (elle est également choisie par AUDENCIA et GEM). C'est donc une épreuve incontournable à laquelle presque tous les candidats doivent se préparer.

Sa structure (trois exercices et un problème) est la garantie qu'une grande partie des connaissances exigibles en fin de classe préparatoire y est abordée chaque année : elle est donc idéale, que ce soit pour une remise à niveau ou pour un approfondissement des connaissances et des techniques de résolution.

On peut envisager deux façons de travailler avec cet ouvrage : un travail thématique (voir le tableau correspondant) permettant de mettre au point les méthodes attachées au thème choisi, ou un travail en temps réel consistant à se

donner entre quatre et six heures pour traiter une épreuve entière afin de s'évaluer, par exemple, pendant les révisions de fin d'année.

Dans les deux cas, lorsqu'une question n'est pas traitée, il faut lire en priorité les conseils de méthode et, si cela ne suffit pas, consulter l'aide à la résolution, puis, en dernier lieu, lire le corrigé. Pour chaque question traitée, il est prudent de consulter les conseils de rédaction, afin de vérifier que l'on a pensé à tout, et aussi la rubrique « Les fautes qu'il ne fallait pas faire » car on peut parfois trouver le bon résultat en commettant des erreurs ou même des fautes graves.

L'épreuve est très longue (très peu de candidats la traitent intégralement) mais elle permet, par la diversité des exercices proposés, à chaque candidat de s'exprimer.

Dans l'optique du concours, il faut savoir que le barème appliqué chaque année permet d'obtenir une excellente note sans pour autant avoir traité l'intégralité de l'épreuve. L'essentiel est de ne pas quitter la salle d'examen en regrettant de ne pas avoir eu le temps de faire (ou même de lire) une question : il ne faut donc pas s'accrocher trop longtemps sur une question qui résiste afin de se laisser le temps de pouvoir tout aborder. Il est cependant inutile de donner des réponses sans preuve, ceci fait peut-être gagner du temps mais ne rapporte assurément aucun point.

J'espère très sincèrement que ce livre sera utile à tous les futurs candidats aux épreuves des concours d'accès aux écoles de commerce et de management.

Je remercie Corinne Baud, des éditions Ellipses, pour ses conseils et sa volonté d'éditer cet ouvrage pour la onzième fois.

Je remercie également Nadia et Georges pour leur soutien et leur relecture attentive.

Le lecteur est invité à me faire part de ses remarques à l'adresse ci-dessous. De notre correspondance naîtra un peu plus de lumière !

sylvain.rondy@hotmail.fr

Table des matières

Épreuve 2025			
<i>Énoncé : page 9.</i>	<i>conseils : page 16.</i>	<i>corrigé : page 38.</i>	<i>barème : page 60.</i>
Épreuve 2024			
<i>Énoncé : page 61.</i>	<i>conseils : page 67.</i>	<i>corrigé : page 89.</i>	<i>barème : page 112.</i>
Épreuve 2023			
<i>Énoncé : page 113.</i>	<i>conseils : page 119.</i>	<i>corrigé : page 137.</i>	<i>barème : page 158.</i>
Épreuve 2022			
<i>Énoncé : page 159.</i>	<i>conseils : page 165.</i>	<i>corrigé : page 181.</i>	<i>barème : page 200.</i>
Épreuve 2021			
<i>Énoncé : page 201.</i>	<i>conseils : page 207.</i>	<i>corrigé : page 224.</i>	<i>barème : page 244.</i>
Épreuve 2020			
<i>Énoncé : page 245.</i>	<i>conseils : page 251.</i>	<i>corrigé : page 266.</i>	<i>barème : page 286.</i>
Épreuve 2019			
<i>Énoncé : page 287.</i>	<i>conseils : page 294.</i>	<i>corrigé : page 311.</i>	<i>barème : page 333.</i>
Épreuve 2018			
<i>Énoncé : page 335.</i>	<i>conseils : page 340.</i>	<i>corrigé : page 351.</i>	<i>barème : page 367.</i>
Épreuve 2017			
<i>Énoncé : page 369.</i>	<i>conseils : page 375.</i>	<i>corrigé : page 389.</i>	<i>barème : page 409.</i>
Épreuve 2016			
<i>Énoncé : page 411.</i>	<i>conseils : page 416.</i>	<i>corrigé : page 430.</i>	<i>barème : page 453.</i>
Épreuve 2015			
<i>Énoncé : page 455.</i>	<i>conseils : page 460.</i>	<i>corrigé : page 473.</i>	<i>barème : page 491.</i>
Épreuve 2014			
<i>Énoncé : page 493.</i>	<i>conseils : page 498.</i>	<i>corrigé : page 510.</i>	<i>barème : page 526.</i>

Tableau thématique

Année	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
ANALYSE												
Suites implicites	EX1							EX1	EX1			
Suites, suites récurrentes	PB	EX3			EX1	PB	PB			EX1		
Suites intégrales	PB	PB			PB						EX1	
Séries	PB	EX3 PB		PB		PB	PB	EX1			EX1 PB	
Équivalents	EX1	EX2		PB	EX1	PB	EX2	EX1			EX1	
DL, Taylor				EX1								
Fonctions intégrales									PB			
Intégrales impropres		PB							PB		EX1	EX1
Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$		EX1				EX1				EX3		EX3
INFORMATIQUE												
Suites, matrices		PB		PB	EX1	PB	EX1			EX1	EX1	
Simulation VA discrètes			EX3	EX3						PB	PB	PB
Simulation VA à densité		EX2	EX2		PB	EX2		EX3	EX2	EX2		PB
Courbes, surfaces		EX1							EX1 PB		EX2	
Calcul, tri, recherche				EX2			PB					
ALGÈBRE												
Polynômes							EX1		PB			
Calcul matriciel		EX1	EX1	EX2			EX1			PB		
Diagonalisation			EX1	EX2			EX1		PB			EX2
Sommes directes					EX3	EX3	EX1	EX2		EX2		
Projecteurs						EX3						
Noyaux, images		EX3	EX1		EX3	EX3	EX1	EX2		EX2		EX2
Polynôme annulateur			EX1 PB	EX2			EX1		EX3	EX2		
ALG. BILINÉAIRE												
Généralités			PB	EX2	EX3		EX3	EX2	EX3		EX3	EX3
Orthogonalité			PB		EX3			EX2	EX3		EX3	EX3
Projections orthogonales	EX2											EX3
Endos symétriques	EX2	EX3	PB		EX3		EX3				EX3	
PROBABILITÉS												
VA discrètes	PB	PB	EX3		EX2		PB	PB		PB	PB	PB
Lois conditionnelles				EX3			PB			PB	PB	
Fctns de VA discrètes											PB	
Σ de VA discrètes	PB	PB		EX3							PB	
VA à densité	EX3	EX2	EX2	EX1	EX2 PB	EX2	EX2	EX3 PB	EX2	EX3	EX2	EX1 PB
Σ de VA à densité												EX1
Fctns de VA à densité		EX2	EX2		PB			EX3	EX2		EX2	
Convergences	EX3	EX2		EX1	EX2	EX2	EX2		EX2			PB
Estimation						EX2				EX3		

Accès aux étudiants de première année

Ce tableau précise quels exercices (ou parties d'exercices) peuvent être traités par des étudiants de première année, ce qui ne signifie pas qu'ils sont forcément faciles.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Problème
2025	Oui			Oui
2024				Oui sauf 2c, d
2023			Oui	Oui (q 1–4)
2022				Oui (sauf III)
2021	Oui			Oui (partie I)
2020			Oui (q 1)	Oui
2019		Oui (q 1)		Oui (I et II)
2018	Oui			Oui (q 1–3)
2017	Oui			Oui (q 3–7)
2016	Oui	Oui (q1, 2)		
2015	Oui			Oui (q 1–4)
2014				Oui (q 1–4)

Proposition de timing

Ce tableau donne une indication du temps qu'il faut passer sur chaque exercice d'une épreuve, en admettant que l'on y consacre quatre heures.

Cela dit, tant que tout se passe bien au cours de la résolution d'un exercice, il faut continuer et, éventuellement, dépasser le temps indiqué (il serait en effet dommage de ne pas traiter des questions que l'on sait résoudre sous prétexte de respecter son tableau de marche).

Au contraire, si un exercice paraît peu inspirant, ou même inaccessible, il ne faut pas perdre inutilement son énergie et son temps à vouloir le traiter : mieux vaut le garder pour la fin s'il reste du temps.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Problème
2025	3/4 h	1/2 h	3/4 h	2 h
2024	3/4 h	1 h	1/2 h	1 h 3/4
2023	3/4 h	1 h	1/2 h	1 h 3/4
2022	1/2 h	1 h 1/4	1/2 h	1 h 3/4
2021	3/4 h	3/4 h	1 h	1 h 1/2
2020	1/2 h	1 h	3/4 h	1 h 3/4
2019	3/4 h	1 h	1/2 h	1 h 3/4
2018	1/2 h	1 h	1/2 h	2 h
2017	1/2 h	1/2 h	3/4 h	2 h
2016	1/2 h	1/2 h	1 h	2 h
2015	1 h	3/4 h	1/2 h	1 h 3/4
2014	1/2 h	1/2 h	1 h	2 h

Sujet 2025

On suppose, et ceci est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de Python sont importées respectivement avec `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]n, +\infty[, f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n)$$

On considère aussi la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

1) a) Dresser le tableau de variations de g , limites comprises.

b) En déduire que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante puis que :

$$\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$$

2) a) Justifier que f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ et donner l'expression de $f'_n(x)$ pour tout réel $x > n$.

b) Montrer que pour tout réel $t > 0$, on a $\ln(t) \leq t - 1$.

En déduire que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

c) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n+1, n+2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n .

3) Montrer que l'on a l'équivalent suivant : $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.

4) a) Justifier que :

$$\forall n \geq 2, \ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$.

5) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par : $\forall n \geq 2, u_n = x_n - n - 1$.

a) Justifier que :

$$\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n \text{ et } \ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

b) Avec la question 4a), montrer alors que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

6) Déterminer la nature des séries de termes généraux u_n et u_n^2 .

Exercice 2.....

Soit E un espace euclidien.

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.

On rappelle le résultat de cours suivant : si p est un projecteur de E , alors p est un projecteur orthogonal de E si, et seulement si, c'est un endomorphisme symétrique de E .

Dans la suite de l'exercice, les sous-espaces vectoriels considérés de E seront non triviaux (différents de E et ne contenant pas uniquement le vecteur nul).

1) Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F .

a) Montrer l'inclusion suivante : $F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$.

c) En déduire que $F = \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$ et que, pour tout $x \in E$, on a :

$$\|p(x)\| \leq \|x\|$$

Dorénavant, on considère F_1 , F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E et pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note p_i la projection orthogonale sur F_i .

2) On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_3$.

a) Montrer que $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

b) Soit x un vecteur de F_3 . En utilisant la question 1c), montrer que :

$$\|x\| \leq \|p_2(x)\|$$

En déduire que x appartient à F_2 puis montrer que x appartient à F_1 .

c) Qu'en déduit-on pour les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F_2$ et F_3 ?

d) Justifier que, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle$ et en déduire l'égalité suivante, toujours pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\langle (p_1 \circ p_2)(x), y \rangle = \langle (p_2 \circ p_1)(x), y \rangle$$

e) Montrer alors que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

3) On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ et on pose $p = p_1 \circ p_2$.

a) Montrer que p est un projecteur de E .

b) Montrer que p est un endomorphisme symétrique de E .

c) En déduire que $p_1 \circ p_2$ est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de E à préciser.

4) Énoncer précisément le résultat démontré dans les questions 2 et 3.

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On définit la fonction f par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire.

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) =]-\infty, 0]$, de densité f , et on note F sa fonction de répartition.

2) Déterminer, pour tout réel x , l'expression de $F(x)$.

3) Rappeler l'expression d'une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

4) En déduire que X admet une espérance et calculer celle-ci.

On pose $Z = X^2$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X . On note G sa fonction de répartition.

5) Pour tout réel positif x , exprimer $G(x)$ en fonction de F et de x .

En déduire que Z suit une loi exponentielle de paramètre 1.

6) En déduire que X admet une variance et donner sa valeur.

7) On souhaite dans cette question simuler la variable X à l'aide de Python.

On rappelle que l'instruction `rd.exponential(1)` permet de simuler la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule n réalisations de la variable X , ce qui signifie qu'elle renvoie une matrice ligne constituée de ces réalisations.

```
def simulX(n):
    M=np.zeros(n) # matrice ligne de taille n
                  # constituée de 0
    for i in range(n):
        -----
    return M
```

Écrire alors une fonction Python nommée `EsperanceX`, prenant en entrée un entier naturel n , qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de X , en utilisant le résultat de `simulX(n)` mais en n'utilisant aucune autre fonction venant d'une bibliothèque particulière de Python.

Partie 2 : étude d'une convergence en loi.

On considère la fonction h définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Montrer que h peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire Y telle que $Y(\Omega)=[0,1]$, de densité h , et on note H sa fonction de répartition.

9) Déterminer pour tout réel x , l'expression de $H(x)$.

On considère maintenant une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que Y .

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$ et $T_n = \sqrt{n}(M_n - 1)$.

On admet que M_n et T_n sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

10) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n la fonction de répartition de T_n .

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right]^n$$

11) Déterminer, pour tout réel y , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$.

12) En déduire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

Problème

On considère la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Le problème se compose de quatre parties.

Dans la partie 1, on utilise Python pour coder les termes de la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans la partie 2, on obtient des estimations de la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dans la partie 3, à l'aide de la partie 2, on étudie une variable aléatoire.

Dans la partie 4, à l'aide de la partie 2, on étudie une fonction dont l'expression est donnée par une somme.

Les parties 3 et 4 sont totalement indépendantes

On rappelle que pour une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\prod_{k=1}^0 u_k = 1$ par convention.

Partie 1

1) Justifier que pour tout entier naturel n , $B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}$.

Compléter alors le code de la fonction Python `B`, prenant en entrée un entier naturel n , et qui renvoie la valeur de B_n .

```
def B(n):
    P=-----
    for k in range(-----):
        P=-----
    return P
```

Partie 2

Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$.

- 2) Calculer W_0 et W_1 .
- 3) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.
- 5) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \text{ et } W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$$

- 6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{2n-1} = \frac{1}{2n B_n}$.

- 7) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2n B_n}$$

puis :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

- 8) En déduire un équivalent de B_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3

On considère dans cette partie une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 1) = P(X_n = -1)$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Dans la suite de cette partie, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

- 9) a) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire Y_k définie par :

$$Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$$

On précisera son espérance et sa variance.

- b) En déduire la loi de la variable T_n définie par $T_n = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k$.

- c) Montrer que $S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et déterminer la loi de S_n .

10) On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, S_k = 0\}$, c'est-à-dire que, pour tout $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers k de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ pour lesquels $S_k(\omega) = 0$.

a) Justifier que :

$$R_n = \text{Card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_{2k} = 0\}$$

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(S_{2k} = 0) = B_k$.

c) On rappelle que si A est un événement, la fonction indicatrice de A , qui est notée $\mathbf{1}_A$, est définie de Ω dans $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

On pose pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_k = (S_{2k} = 0)$. Donner une expression de R_n à l'aide des fonctions indicatrices des événements A_k .

d) En déduire que l'espérance de R_n est donnée par la formule :

$$E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k$$

11) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.

12) En déduire alors, à l'aide de la partie 2, puis par sommation, un équivalent de l'espérance de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie 4

13) a) Montrer que :

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}$$

b) En déduire que, pour tout réel $x \in [0, 4[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge.

Soit f la fonction définie sur $[0, 4[$ par :

$$\forall x \in [0, 4[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$$

14) Justifier que f est croissante sur $[0, 4[$. On admet dans la suite que f est continue sur $]0, 4[$.

15) a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 4[$ et tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n \leq \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi} (n+1) \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in [0, 4[, \sqrt{\pi} \frac{x}{4-x} \leq f(x) \leq \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{4} \times \frac{1}{(1-x/4)^2} + \frac{x}{4-x} \right)$$

Déterminer alors les limites de f en 0^+ et en 4^- . Qu'en déduit-on pour f en 0 ?

16) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 4[$, $f(x) \geq \frac{x}{2}$.

17) On admet que $f(x) = \frac{x}{2} + o(x)$.

En utilisant tous les résultats précédents, tracer l'allure précise de la courbe représentative de la fonction f .

Conseils 2025

Exercice 1

❖ Conseils de méthode

1) a) Il faut calculer $g'(x)$ et étudier son signe. Pour les limites, seule une des deux nécessite d'invoquer les croissances comparées.

b) Pour la décroissance de la suite, il faut utiliser les variations de g . Pour l'inégalité demandée, comme on a $k \geq 4$, tout ce que l'on peut écrire est :

$$\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(4)}{4}$$

Il faut ensuite trouver le « truc ».

2) a) L'expression de $f'_n(x)$ ne se simplifie pas vraiment : il faut attendre la question 2b) pour voir une éclaircie.

b) Cette question se rencontre souvent aux concours : on peut étudier rapidement la fonction $t \mapsto t - 1 - \ln(t)$, ou bien utiliser la concavité du logarithme népérien alliée avec l'équation d'une des tangentes à sa courbe représentative.

Pour le signe de $f'_n(x)$, il suffit d'appliquer $\ln(t) \leq t - 1$ avec $t = \frac{x}{x-n}$.

c) C'est la situation typique d'application du théorème de la bijection.

3) Une bonne idée est de commencer en écrivant $n+1 \leq x_n \leq n+2$.

4) a) Il faut réécrire l'égalité $f_n(x_n) = 0$ qui définit x_n , puis diviser par x_n .

b) Pour la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n}$, il faut justifier qu'on peut utiliser les croissances comparées.

Ensuite, l'encadrement $1 \leq x_n - n \leq 2$ permet d'avoir :

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq 2 \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

Il faut alors se souvenir que, grâce à la question 4a), on a $(x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n} = \ln(x_n - n)$, ce qui permet d'encadrer $\ln(x_n - n)$.

5) a) D'après la question 4b), on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$, ce qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. On a alors accès à un équivalent classique du cours.

Pour la suite de la question, comme $1 + n + u_n = x_n$, on a $\frac{\ln(1 + n + u_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)}$

puis on peut faire apparaître $\frac{x_n}{n}$ dans le logarithme du numérateur.

b) Il faut réécrire le résultat de la question 4a) sous la forme :

$$\ln(1 + u_n) = (1 + u_n) \frac{\ln(1 + n + u_n)}{1 + n + u_n}$$

Ensuite, on prouve que $1 + n + u_n \underset{+\infty}{\sim} n$, et la question 5a) permet de finir le travail.

6) On peut écrire que, pour tout $n \geq 2$, $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(2)}{n}$, puis se référer à la série harmonique qui diverge pour conclure que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$ diverge. On conclut avec le critère d'équivalence.

Pour la suite, ayant $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$, on peut montrer que $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ puis se référer à une série de Riemann convergente.

❖ Conseils de rédaction

1) a) • Il est bien de justifier pourquoi g est dérivable avant de la dériver.

• Il est bien également de mettre une double barre dans le tableau de variation puisque g n'est pas définie en 0.

b) Ayant la décroissance de g sur $[e, +\infty[$, il faut préciser que $3 \geq e$ afin de pouvoir conclure que la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante.

2) a) Pour la dérivabilité de f_n , il faut absolument signaler que $x - n > 0$ pour avoir le droit d'appliquer le logarithme népérien et obtenir ensuite la dérivabilité de $x \mapsto \ln(x - n)$, ce qui était le seul point problématique.

b) Si on utilise la concavité du logarithme népérien, mieux vaut éviter de citer « la tangente en 1 » ou « la tangente au point 1 », mais plutôt « la tangente au point d'abscisse 1 » ou « la tangente au point (1, 0) ».

Pour appliquer l'inégalité $\ln(t) \leq t - 1$ valable pour $t > 0$, avec $t = \frac{x}{x - n}$, le

minimum est de signaler que $\frac{x}{x - n} > 0$.

Ayant $f'_n(x) \leq -\frac{n}{x}$, il faut préciser que $x > n > 0$ pour conclure $f'_n(x) < 0$.

c) Il ne faut oublier aucune des hypothèses garantissant que f_n est une bijection (f_n continue sur $[n+1, n+2]$, f_n strictement décroissante sur $[n+1, n+2]$) et ensuite montrer **vraiment** que $0 \in [f_n(n+2), f_n(n+1)]$.

3) Ayant $n+1 \leq x_n \leq n+2$, l'argument $n > 0$ est incontournable pour obtenir :

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+2}{n}$$

4) a) Avant de diviser par x_n , il faut assurer l'affaire avec $x_n \neq 0$.

b) Il faut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ afin d'appliquer les croissances comparées.

Pour la suite de la question, il est nécessaire de montrer que $\frac{\ln(x_n)}{x_n} \geq 0$ pour

passer de $1 \leq x_n - n \leq 2$ à $\frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq 2 \frac{\ln(x_n)}{x_n}$.

Enfin, ayant obtenu $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n - n) = 0$, c'est la continuité de la fonction exponentielle en 0 qui permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$.

5) a) Pas question de balancer $\ln(1+u_n) \sim_{+\infty} u_n$ sans avoir établi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) Attention de ne pas composer les équivalents (voir « Les fautes qu'il ne fallait pas faire »).

6) Afin d'appliquer les critères de convergence (ou divergence) des séries, il ne faut pas oublier de signaler que ces séries sont à termes positifs.

❖ Aide à la résolution

1) a) La limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ n'est pas indéterminée.

b) Pour la fin de la question, il faut remarquer que $\frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$ (subtil !).

2) c) Il faut vérifier que l'on a $f_n(n+1) \geq 0$ (facile) et $f_n(n+2) \leq 0$ (moins facile) pour conclure avec le théorème de la bijection.

4) b) Ayant $\frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq \ln(x_n - n) \leq 2 \frac{\ln(x_n)}{x_n}$, on conclut avec le théorème d'encadrement qui donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n - n) = 0$.

5) a) La grosse astuce est d'écrire :

$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(x_n) - \ln(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(x_n/n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$$

b) Pour obtenir $1 + n + u_n \sim n$, il suffit de montrer que $1 + u_n$ est négligeable devant n au voisinage de $+\infty$.

6) Pour la série de terme général u_n^2 , on peut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} \frac{\ln(n)^2}{n^2} = 0$,

ce qui fournit $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) • Affirmer sans argument que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ n'est pas recevable : une limite, ça se prouve ! Cela dit, il n'était pas accepté non plus de justifier cette limite par croissances comparées car ce n'est pas le cas ici.

Pire était de trouver $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

- Il est dommage de trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$: c'est une limite du cours !

- Attention dans les calculs simples ! Ayant $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}$, il est

très malencontreux d'en déduire $g'(x) = -\frac{\ln(x)}{x^2}$: ça fiche la suite en l'air !

- Une grande naïveté consiste à croire que $\mathbb{R}_+^* = [1, +\infty[$ puis à en déduire que, si $t \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{1}{t} \leq 1$.

b) • La grosse bétise : « $\ln(3) \leq 3$ et $\ln(2) \leq 2$ donc $\frac{\ln(3)}{3} \leq \frac{\ln(2)}{2}$ » !

- Comme $\frac{\ln(2)}{2}$ n'est pas un terme de la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$, il n'était pas très honnête d'invoquer la décroissance de la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ pour en déduire :

$$\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$$

Tout ce qu'on pouvait écrire, c'était :

$$\forall k \geq 4, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(4)}{4}$$

• Quand on écrit « la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante "donc il est clair" que $\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(3)}{3} \leq \frac{\ln(2)}{2}$ », ce qui est "clair", c'est la première inégalité, mais la deuxième est fautive (en effet, on a $\frac{\ln(3)}{3} \approx 0,366$ et $\frac{\ln(2)}{2} \approx 0,347$) !

2) b) • Après avoir trouvé $\ln''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$, il est dommage d'en conclure que la fonction logarithme népérien est convexe !

• Avec $\ln(x) \leq x-1$ et $\ln(x-n) \leq x-n-1$, il ne faut surtout pas en déduire que $\ln(x) - \ln(x-n) \leq x-1 - (x-n-1)$: en faisant ça, on soustrait des inégalités, ce qui est « anti-mathématique ».

De plus, on ne pouvait pas en déduire que $f'_n(x) < 0$.

c) • Affirmer que $\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln(2)}{2}$ sans citer la question 1b) est une pure escroquerie.

• Il est mal vu d'écrire « f_n réalise une bijection de $[n+1, n+2]$ sur $[f_n(n+1), f_n(n+2)]$ » alors que f_n est décroissante !

• Il n'était en aucun cas question de vouloir résoudre l'équation $f_n(x) = 0$ (il suffisait de lire correctement l'énoncé pour s'en convaincre).

4) a) • Écrire « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n - n) = 0$ » laisse pantois car il y a une forme indéterminée dans l'expression $(x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ qui donne $\ln(x_n - n)$.

• Avec $x_n \sim n$, pas question de conclure $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 0$: on peut se convaincre que c'est faux en choisissant le contre exemple $x_n = n+1$.

b) • Appliquer le logarithme népérien à l'encadrement $1 \leq x_n - n \leq 2$ est une idée mais elle ne donne rien de bon : la question était plus fine !

• Une faute énorme digne d'un(e) mauvais(e) élève de terminale :

$$\ln(x_n - n) = \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)}$$

• L'enchaînement « $x_n \sim n$ donc $\frac{\ln(x_n)}{x_n} \sim \frac{\ln(n)}{n}$ » revient à composer

des équivalents, quand bien même on invoque la continuité du logarithme.

Quant à écrire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = n$, ça n'a aucun sens !

5) a) • Il était bien d'écrire $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n+2)}{\ln(n)}$ mais affirmer sans

preuve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n)} = 1$ pour pouvoir conclure par encadrement est un peu léger : c'est certes vrai, mais en maths, il faut prouver !

- Un autre non-sens du même style que celui évoqué pour la question 4b) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n) = \ln(n) !$$

b) Il faut éviter l'enchaînement faux suivant :

$$\ll 1+n+u_n \underset{+\infty}{\sim} n \text{ donc } \ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) \gg$$

On ne peut pas composer les équivalents (bis) !

6) Il était faux d'écrire que, pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$.

Ce n'est vrai que si $n \geq 3$.

Exercice 2.....

❖ Conseils de méthode

1) a) Il suffit de montrer que, si $x \in F$, alors $\|p(x)\| = \|x\|$.

b) Un bon début est d'écrire $x = x - p(x) + p(x)$.

c) Il faut montrer l'inclusion réciproque de celle de la question 1a) en utilisant le résultat de la question 1b).

L'inégalité demandée vient du fait que $\|x - p(x)\|^2 \geq 0$.

2) a) La méthode est toujours la même : on prend un élément x quelconque dans $F_1 \cap F_2$ et on prouve que $x \in F_3$.

b) Si $x \in F_3$, on a $x = p_3(x) = (p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x))$ puis on applique la fin de la question 1c) au projecteur p_1 .

Pour en déduire que $x \in F_2$, la question 1c) fournit $\|p_2(x)\| \leq \|x\|$.

Pour montrer que $x \in F_1$, on utilise le fait que $x = p_1(p_2(x))$ associé au fait que p_1 projette sur F_1 .

c) La question précédente a permis de montrer que $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

d) Pour le début de la question, il faut se souvenir que p_3 est un projecteur orthogonal, donc que p_3 est un endomorphisme symétrique.

Pour la suite, on écrit $\langle (p_1 \circ p_2)(x), y \rangle = \langle x, (p_1 \circ p_2)(y) \rangle$ et on utilise le fait que p_1 est symétrique, puis ensuite que p_2 est symétrique.

e) Il faut montrer que, pour tout $x \in E$, on a $(p_1 \circ p_2)(x) = (p_2 \circ p_1)(x)$, ce qui est classique en algèbre bilinéaire avec la deuxième égalité de la question 2d).

3) a) Il faut d'abord montrer que p est un endomorphisme de E puis que $p^2 = p$.

b) D'après le cours, il suffit de montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$$

c) Pour montrer que p est une projection orthogonale, il faut utiliser le rappel de cours fait au début de l'exercice.

4) C'est une question de synthèse : on a montré une équivalence au cours des questions 2) et 3).

❖ Conseils de rédaction

1) c) Pour passer de $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$ à $\|x\| \geq \|p(x)\|$, il y a deux points importants à citer : la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ qui donne $\sqrt{\|x\|^2} \geq \sqrt{\|p(x)\|^2}$, et la positivité de la norme qui donne $\sqrt{\|x\|^2} = \|x\|$ et $\sqrt{\|p(x)\|^2} = \|p(x)\|$.

2) c) Il faut justifier correctement l'égalité $F_1 \cap F_2 = F_3$ (par double inclusion).

e) Bien spécifier que $(p_1 \circ p_2)(x) = (p_2 \circ p_1)(x)$ est vrai pour tout vecteur x de E , afin de pouvoir conclure $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

3) a) • Ne pas oublier de vérifier que p est un endomorphisme de E .

• Penser également (pour plus de crédibilité) à citer l'associativité de la loi de composition afin d'avoir $(p_1 \circ p_2) \circ (p_1 \circ p_2) = p_1 \circ (p_2 \circ p_1) \circ p_2$.

❖ Aide à la résolution

1) a) Si $x \in F$, alors on doit savoir que $p(x) = x$ car p projette sur F .

b) Il faut savoir que $p(x) \perp x - p(x)$ puis utiliser le théorème de Pythagore.

c) Sous l'hypothèse $\|p(x)\| = \|x\|$, on a, grâce à 1b), $\|x - p(x)\|^2 = 0$.

La suite est facile par propriété de la norme.

2) a) Il faut calculer $p_3(x)$ grâce à $p_1 \circ p_2 = p_3$ puis prouver que $p_3(x) = x$.

b) D'après la question 1c), on peut écrire $\|p_1(p_2(x))\| \leq \|p_2(x)\|$.

Pour la suite, comme on a $\|x\| \leq \|p_2(x)\|$ et $\|p_2(x)\| \leq \|x\|$, c'est plié !

Pour la fin, on a $x = p_1(p_2(x))$ donc $x \in \text{Im}(p_1)$ et $\text{Im}(p_1)$, c'est F_1 .

c) La question 2b) a fourni $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ et on sait depuis la question 2a) que $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

d) Comme p_1 est symétrique, on a $\langle x, (p_1 \circ p_2)(y) \rangle = \langle p_1(x), p_2(y) \rangle$, puis on utilise le fait que p_2 est symétrique et la conclusion n'est pas très loin.

e) Il faut écrire $\langle (p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x), y \rangle = 0$ pour tout $y \in E$, puis il y a deux options :

- Soit on choisit $y = (p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x)$.
- Soit on écrit que $(p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x) \in E^\perp$.

3) a) Il est bien d'écrire $p^2 = (p_1 \circ p_2) \circ (p_1 \circ p_2) = p_1 \circ (p_2 \circ p_1) \circ p_2$ puis il faut utiliser le fait que p_1 et p_2 commutent.

b) On peut montrer dans un premier temps que $\langle p(x), y \rangle = \langle p_2(x), p_1(y) \rangle$. Ensuite, il faut se souvenir que p_2 est symétrique et qu'on dispose de la relation $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

4) On a montré l'équivalence :

$p_1 \circ p_2$ est un projecteur orthogonal de E si, et seulement si, $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) Il ne fallait pas oublier que $x \in F \Leftrightarrow x = p(x)$: c'est du cours !

b) • L'énorme faute consiste à penser que, comme $E = F \oplus F^\perp$, alors si $x \in E$, on a, soit $x \in F$, soit $x \in F^\perp$: il y a confusion entre somme directe et réunion disjointe de deux ensembles.

- Écrire que $\|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 = \langle x - p(x), x - p(x) \rangle + \langle p(x), p(x) \rangle$

est correct mais le drame est de faire suivre avec :

$$\ll \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 = \langle x - p(x) + p(x), x - p(x) + p(x) \rangle \gg$$

Il est vrai que ça mène bien à $\|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 = \|x\|^2$, mais la propriété utilisée est une pure invention.

2) a) Écrire « comme $p_1 \circ p_2 = p_3$, alors $F_1 \cap F_2 \subset F_3$ » est joliment (?) tenté mais ça n'a aucun fondement !

b) Ayant montré (bien ou mal) que $x \in F_2$, il n'est pas question de camoufler la poussière sous le tapis en écrivant « par le même procédé, on a $x \in F_1$ » car ce n'est pas le même procédé qu'on utilise !

3) Dans cette question, on n'avait plus $p_1 \circ p_2 = p_3$! Si ça avait été le cas, les questions 3a), 3b) et 3c) devenaient débiles puisqu'on sait que p_3 est un projecteur, qu'il est symétrique et qu'il projette sur F_3 .

a) Pour ceux qui étaient embarqués dans cette voie, il était dommage de croire que, si $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$, alors p est un projecteur. C'est la réciproque qui est vraie.

Exercice 3.....

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) Toujours les mêmes points à vérifier : bonne définition et positivité de f sur $\mathbb{R}$, continuité de f sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en quelques points, ici en 0) puis convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ qui doit être égale à 1.

2) La définition est le seul point de départ envisageable : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

3) C'est du cours !

4) X possède une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$ converge absolument, ce qui revient à la convergence de $\int_{-\infty}^0 |t f(t)|dt = \int_{-\infty}^0 -t f(t)dt$ car f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, et positive sur $\mathbb{R}_-$, et enfin à la convergence de $\int_{-\infty}^0 t f(t)dt$.

5) Ici aussi, un seul bon départ possible : $G(x) = P(Z \leq x) = P(X^2 \leq x)$.

Ensuite, comme X^2 ne prend que des valeurs positives, il faut distinguer les cas $x < 0$ et $x \geq 0$.

6) Z possède une espérance (car elle suit une loi exponentielle) ce qui montre que X possède un moment d'ordre 2 dont on connaît la valeur d'après le cours sur la loi exponentielle.

7) • La ligne à compléter commence certainement par : « $M[i] =$ ».

• Pour l'espérance de X , on n'a pas le droit d'utiliser les fonctions prédéfinies dans Python (comme `np.mean`, `np.sum`, etc.) donc il faut l'approcher par le calcul d'une moyenne arithmétique pour laquelle on ne fait que des additions et une division.

Partie 2

8) Même chose qu'à la question 1).

9) Ici aussi, un seul point de départ : $H(x) = \int_{-\infty}^x h(t)dt$.

10) Par définition, on a $F_n(x) = P(T_n \leq x) = P(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$ puis il faut faire évoluer jusqu'à $F_n(x) = P\left(M_n \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$. Ici, il faut se souvenir de la façon de gérer un max de variables aléatoires.

11) Un immense classique : il faut revenir à la forme exponentielle.

12) Si $x > 0$, on a $1 + \frac{x}{\sqrt{n}} > 1$ et on trouve $F_n(x) = 1$.

Si $x \leq 0$, alors, pour n assez grand, on montre que $0 \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \leq 1$ et on peut en déduire explicitement $F_n(x)$.

❖ Conseils de rédaction

Partie 1

1) • Il ne faut pas balancer que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$ sans aucune preuve : on perd des points bêtement !

• Par ailleurs, il est inutile de prouver la continuité de f en 0 : c'est le cas, mais on s'en fiche !

2) On perd tous les points de cette question si on écrit $F(x) = e^{-x^2}$ sans condition sur x alors que le calcul n'est valable que si $x \leq 0$.

Il n'est pas question de rapatrier les deux cas $x \leq 0$ et $x > 0$ « à l'arrache » juste avant de conclure !

4) Ne pas négliger la convergence, si possible avant de donner la valeur de l'espérance.

5) • Même chose qu'à la question 2) : il faut distinguer les cas avant de s'embarquer dans les calculs, l'idée étant de ne pas écrire $\sqrt{x}$ sans avoir écrit avant qu'on étudie le cas $x \geq 0$.

• L'égalité $P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ n'est valable que parce que X est à densité : il était de bon goût de le signaler.

En fait, l'égalité valable tout le temps est $P(-\sqrt{x} < X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ et le fait que X soit à densité garantit que $P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < X \leq \sqrt{x})$.

6) Il est bien de citer et d'énoncer le théorème de Koenig-Huygens.

Partie 2

8) Encore une fois, il ne faut pas négliger positivité et continuité !

9) Les trois cas $x < 0$, $x \in [0, 1]$ et $x > 1$ doivent être présents dès le départ avant tout calcul.

10) Pour passer de $P\left(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x\right)$ à $P\left(M_n - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$, il est bien de préciser que $\sqrt{n} > 0$ pour pouvoir diviser et ne pas changer le sens de l'inégalité.

11) La classe consistait à prouver que pour n assez grand on avait $1 + \frac{y}{n} > 0$, ce qui donnait le droit d'écrire $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)$.

❖ Aide à la résolution

Partie 1

1) Pour le calcul de l'intégrale, une primitive de $t \mapsto -2t e^{-t^2}$ est $t \mapsto e^{-t^2}$.

2) Si $x \leq 0$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^x -2t e^{-t^2} dt$.

Si $x > 0$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^0 -2t e^{-t^2} dt + \int_0^x 0 dt$.

3) La forme générale de la densité la plus classique de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

est donnée par $\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ et il suffit de remplacer m et σ^2 respectivement par 0 et $\frac{1}{2}$.

4) La convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^0 -2t^2 e^{-t^2} dt$ sont données par le fait qu'on reconnaît une intégrale proportionnelle à celle donnant le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

5) Si $x < 0$, alors $G(x) = P(X^2 \leq x) = 0$.

Si $x \geq 0$, alors $G(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$.

6) On a $E(X^2) = E(Z) = 1$.

7) Une boucle `for` s'impose pour calculer la moyenne approchant $E(X)$.

Partie 2

9) Si $x < 0$, $H(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

Si $x \in [0, 1]$, $H(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2(1-t) dt$.

Si $x > 1$, $H(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 2(1-t) dt + \int_1^x 0 dt$.

10) On trouve $F_n(x) = \prod_{k=1}^n P\left(Y_k \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$.

11) Avec un équivalent classique, on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) = y$.

12) Si $x \leq 0$, on a, pour n assez grand, $F_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ et il suffit d'appliquer la question 11).

❖ **Les fautes qu'il ne fallait pas faire**

Partie 1

1) • Le gros manque de rigueur : « $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_A^0 f(x) dx$ » !

• Rappelons qu'il est interdit d'écrire « $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \left[e^{-x^2}\right]_{-\infty}^0$ » : il faut passer par une intégrale partielle pour éviter le crochet d'intégration avec une borne infinie.

2) • Il est très vilain d'écrire $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$: ça ne veut rien dire.

• Il est au moins aussi moche d'écrire $F(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$: cette fonction

n'est pas une fonction de répartition ! Donner la valeur 0 à $F(x)$ sur $]0, +\infty[$ est une très grave faute. À ce sujet, donner sans preuve la bonne valeur (à savoir 1) est risqué car ça ne permet pas d'accorder le bénéfice du doute au candidat qui peut se trouver placé dans le camp de ceux qui ont de la chance...

• Il n'était pas utile de vérifier que F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en quelques points : on ne fait ça que si l'énoncé demande de vérifier que la variable aléatoire considérée est à densité.

En revanche, vérifier rapidement au brouillon les limites en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que la continuité en 0 (car X est à densité) pouvait permettre de se corriger en cas d'erreur.

3) • Une faute souvent vue consistait à donner comme densité d'une variable T suivant la loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ la fonction $f_T : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ en confondant un peu avec la loi normale centrée réduite.

- Une autre faute était d'écrire $f_T : x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ alors que $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \frac{1}{2}$.

4) Trouver une espérance positive alors que X est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ devrait pousser à chercher une erreur ou à signaler qu'il y en a une si on ne la trouve pas.

5) • Il ne fallait pas se sentir obligé de faire une double faute (et pour autant ne pas arriver à ses fins), comme dans l'enchaînement suivant :

$$\ll \forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = P(X^2 \leq x) = F(-\sqrt{x}) - F(\sqrt{x}) = F(-\sqrt{x}) \gg$$

Les deux dernières égalités sont fausses.

- Écrire $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ et conclure tout de même que Z suit la loi

exponentielle de paramètre 1 révèle, soit une petite (grosse ?) malhonnêteté, soit une confusion entre densité et fonction de répartition.

- Donner comme fonction de répartition $G(x) = 1 - e^{-x}$ est irrecevable : elle ne tend pas vers 0 en $-\infty$.

6) Il faut s'inquiéter de trouver une variance négative : ça ne doit jamais être le cas, quelles que soient les valeurs prises par la variable aléatoire !

7) Dommage d'écrire $X = \text{np.sqrt}(Z)$ alors que $X = -\sqrt{Z}$.

Partie 2

9) Donner comme fonction de répartition $H(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une hérésie : elle ne tend pas vers 1 en $+\infty$ et elle n'est pas continue en 1.

10) Il n'est pas bien du tout d'écrire $\left(M_n \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \left(\bigcap_{k=1}^n Y_k \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$: on pourrait croire que l'auteur manipule $\bigcap_{k=1}^n Y_k$, intersection de variables aléatoires, ce qui est un non-sens !

11) • La faute ultra fréquente : « $n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} y$ donc $e^{n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^y$ ». On compose encore des équivalents et il ne faut pas !

- La faute de débutant : « $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = 1$ ». Ici, la faute

consiste à faire tendre le n de $\frac{y}{n}$ vers $+\infty$ d'abord, puis à faire tendre ensuite l'exposant n vers $+\infty$: le problème, c'est que c'est le même n .

- Encore une pour la route !

$$\ll \forall y > 0, \left(1 + \frac{y}{n}\right) > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = +\infty \gg$$

Ici, on confond avec la règle donnant la limite d'une suite géométrique, ce qui n'est pas le cas (la pseudo-raison n'est pas constante).

12) Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = e^{-x^2}$ et conclure tout de même que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X relève de la plus pure fantaisie ou d'une belle arnaque.

Problème

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) On a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!} \times \frac{1}{n!} = 2n \times (2n-1) \times \dots \times (n+2) \times (n+1) \times \frac{1}{n \times (n-1) \times \dots \times 1}$.

Faire une récurrence est également envisageable mais dangereux (voir « Les fautes qu'il ne fallait pas faire »).

Pour le code à compléter, on initialise avec $P=1$ puis on itère dans la boucle avec une instruction du genre $P=P \times \dots$.

Partie 2

2) Pour W_1 , une primitive de $t \mapsto \sin(t)$ est $t \mapsto -\cos(t)$.

3) On peut étudier le signe de $W_{n+1} - W_n$ ou comparer W_{n+1} et W_n directement.

4) Comme presque toujours pour exprimer un terme d'une suite intégrale en fonction d'un autre terme, on fait une intégration par parties.

5) On peut procéder par récurrence grâce à la relation obtenue à la question 4).

6) Le mieux est d'utiliser $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$ associé à $W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$.

7) On voit que le premier encadrement demandé n'est rien d'autre que $W_{2n+1} \leq W_{2n} \leq W_{2n-1}$, ce qui provient de la décroissance de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ensuite, on peut en déduire un encadrement de B_n^2 , puis de B_n .

8) Ayant l'encadrement $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$, on peut sentir que l'équivalent cherché est $B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Partie 3

9) a) Comme X_k prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et comme $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$, alors Y_k prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, ce qui fait que Y_k suit une loi de Bernoulli dont il reste à trouver le paramètre.

b) On doit voir que $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

c) On a $S_n = 2T_n - n$ et on sait que $T_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ donc on doit pouvoir conclure sans tricher pour trouver $S_n(\Omega)$.

10) a) Il suffit de montrer que les variables S_{2k+1} ne prennent pas la valeur 0.

b) Il faut remarquer que $(S_{2k} = 0) = (T_{2k} = k)$ puis utiliser la loi de T_{2k} qui est binomiale.

c) Cette question est classique, même si elle n'est pas toujours posée sous cette forme un peu sophistiquée : la variable aléatoire R_n est égale au nombre de fois où A_k est réalisé, ce qui est la définition d'une somme de variables de Bernoulli... Lesquelles ?

d) La linéarité de l'espérance fait son œuvre.

11) On peut procéder par calcul intégral comme dans le corrigé, ou avec l'inégalité des accroissements finis, ou même grâce à la quantité conjuguée.

12) Comme $E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k$, il faut partir de l'encadrement de B_k obtenu à la question 7), puis l'élargir grâce à la question 11), et enfin sommer (car les sommes en présence sont "télescopiques").

Partie 4

13) a) Il faut utiliser l'équivalent de B_n trouvé à la question 8) : $B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

b) On écrit un équivalent de $\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ grâce à la question précédente et le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs s'applique pour peu qu'on ait prouvé que la série de terme général $\sqrt{n\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge.

14) Il suffit de prendre deux réels x et y de $[0, 4[$ tels que $x \leq y$ puis de prouver que l'on a $f(x) \leq f(y)$.

15) a) Il faut partir de l'encadrement $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ obtenu à la question 7), remplacer B_n par $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$, inverser, puis élargir et multiplier par $\left(\frac{x}{4}\right)^n$.

b) Il suffit de sommer l'encadrement obtenu précédemment.
Pour les limites, l'une seulement utilise le théorème d'encadrement, l'autre le théorème de comparaison par minoration.

16) Il faut remarquer que $\frac{x}{2}$ est le premier terme de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

17) Il est bien de respecter les variations, de faire apparaître une tangente (celle donnée par l'équivalent admis) et une asymptote verticale.

❖ Conseils de rédaction

Partie 1

1) Il est bien de penser au cas $n = 0$.

Partie 2

3) Si l'on veut écrire $W_{n+1} - W_n$ sous forme d'une seule intégrale, il faut citer la linéarité de l'intégration. Pour le signe, la croissance des bornes doit être citée.

4) • Pour l'intégration par parties, ne pas oublier de signaler la classe C^1 des fonctions choisies.

• Ayant trouvé $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, il faut ensuite préciser que $n+2$ est différent de 0 avant de diviser.

6) Pour diviser par $2n$ il faut signaler pourquoi on a $2n \neq 0$.

7) Ayant trouvé $\frac{1}{\pi(n+1)} \leq B_n^2 \leq \frac{1}{\pi n}$, il faut prendre la racine carrée en citant sa croissance sur $\mathbb{R}_+$ et ne pas oublier qu'a priori, on a $\sqrt{B_n^2} = |B_n|$, puis c'est la positivité de B_n qui permet de se débarrasser de la valeur absolue.

8) • Pour multiplier l'encadrement $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ par $\sqrt{\pi n}$, il faut signaler que $\sqrt{\pi n} > 0$ pour garantir que le sens des inégalités est conservé.

• Cette démarche est obligatoire car on ne dispose pas dans le programme d'un "théorème d'équivalence par encadrement".

Partie 3

9) a) Il faut justifier l'égalité $P(X_k = 1) + P(X_k = -1) = 1$ par le fait que $((X_k = 1), (X_k = -1))$ est un système complet d'événements.

b) Avec l'égalité $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, il faut bien signaler l'indépendance des Y_k et le fait que ce soit des variables de Bernoulli de même paramètre pour conclure que T_n suit une loi binomiale.

c) Mieux vaut calculer $P(S_n = 2j - n)$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $P(S_n = k)$ pour tout $k \in S_n(\Omega)$: c'est plus confortable et c'est équivalent.

10) c) Même si c'est beaucoup moins rigoureux, on peut éviter de passer, comme dans le corrigé, par les "petits omegas".

d) Il est bien de prouver que les variables $\mathbb{1}_{A_k}$ ont une espérance.

12) • Même remarque que la deuxième remarque de la question 8).

• Au moment de diviser par $2\sqrt{n}$, il faut signaler que $2\sqrt{n} > 0$.

Partie 4

13) b) Pour tous les critères de convergence, ne pas oublier de signaler que les séries sont à termes positifs.

14) • Rien dans notre cours ne permet de dériver une fonction présentée comme somme d'une série convergente. La linéarité de la dérivation ne permet que de dériver des sommes finies de fonctions dérivables.

• Ayant $(x, y) \in [0, 4]^2$, pour passer de $x \leq y$ à $x^n \leq y^n$, il faut citer la croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$.

15) a) Il faut citer la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ pour passer de

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \text{ à } \sqrt{\pi}\sqrt{n} \leq \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}.$$

b) Il est bien de rappeler que $\left| \frac{x}{4} \right| < 1$, ce qui garantit que la série géométrique

et la série géométrique dérivée de raison $\frac{x}{4}$ sont convergentes.

17) Tant qu'à faire de répondre à cette question, autant le faire le plus proprement possible, sinon, c'est du temps perdu pour rien.

❖ Aide à la résolution

Partie 1

1) Le produit $2n \times (2n-1) \times \dots \times (n+2) \times (n+1)$ s'écrit $\prod_{k=1}^n (k+n)$ et le produit $n \times (n-1) \times \dots \times 1$ s'écrit $\prod_{k=1}^n k$.

Partie 2

3) La clé réside dans le fait que la variable d'intégration t appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui permet d'avoir $0 \leq \sin t \leq 1$.

4) Il faut poser $u(t) = (\sin t)^{n+1}$ et $v'(t) = \sin t$.

Ensuite, dans l'intégrale restante, on utilise la relation $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$.

5) Pour l'hérédité des récurrences, on a $W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}$ et $W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1}$.

Ensuite, ayant obtenu $W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\left(\frac{2n}{n}\right)}{4^n}$, il faut multiplier par $\frac{2n+2}{2n+2}$ afin

de finaliser avec $W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2}$.

La même technique fonctionne pour trouver $W_{2n+3} = \frac{1}{(2n+3)} \times \frac{4^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$.

7) Pour établir le deuxième encadrement en partant de $\frac{1}{(2n+1)B_n} \leq \frac{\pi}{2} B_n \leq \frac{1}{2nB_n}$,

il faut multiplier par $\frac{2}{\pi} B_n$ et minorer $\frac{1}{2n+1}$ par $\frac{1}{2n+2}$ (il fallait y penser !).

8) Il suffit de diviser le deuxième encadrement de la question 7) par $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (c'est-à-dire le multiplier par $\sqrt{\pi n}$) puis d'utiliser le théorème d'encadrement.

Partie 3

9) a) Comme $P(X_k = 1) = P(X_k = -1)$ et comme $P(X_k = 1) + P(X_k = -1) = 1$, on a $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$.

b) On a $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ donc T_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre : le cours permet de conclure.

c) Pour la loi de S_n , il faut établir que $P(S_n = 2j - n) = P(T_n = j)$.

10) a) D'après la question 9c), on a $S_{2k+1}(\Omega) = \{2j - (2k+1), j \in \llbracket 0, 2k+1 \rrbracket\}$: cet ensemble contient-il le nombre 0 ?

b) Ayant trouvé $P(S_{2k} = 0) = P(T_{2k} = k)$, on trouve vite le résultat demandé si on n'oublie pas que T_{2k} suit la loi binomiale de paramètres $2k$ et $\frac{1}{2}$.

c) On doit proposer $R_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k}$ puis justifier.

d) On déduit de la question précédente que $E(R_n) = \sum_{k=1}^n E(\mathbb{I}_{A_k})$ puis il faut se souvenir que $\mathbb{I}_{A_k}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A_k)$.

11) Si on choisit la méthode intégrale, l'inégalité de gauche s'obtient en établissant que $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_k^{k+1} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ et que $\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$. L'inégalité de droite s'obtient en établissant, d'une part que $\int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_{k-1}^k = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$, et d'autre part que $\int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

12) Grâce à l'encadrement obtenu à la question 11), on peut passer de $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{\pi} B_k \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ à $2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \leq \sqrt{\pi} B_k \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$, puis en sommant cet encadrement, on crée deux télescopes qui donnent :

$$2(\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) \leq \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^n B_k \leq 2\sqrt{n}$$

Comme $E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k$, on a presque fini à une division par $2\sqrt{n}$ près.

Partie 4

13) a) On sait que $B_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ et que $B_n \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, ce qui donne vite le résultat.

b) Pour prouver que la série de terme général $\sqrt{n\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ converge, on peut établir, grâce aux croissances comparées, que $\sqrt{n\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

15) a) Grâce à la question 7), on a $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ et on en déduit $\sqrt{\pi}\sqrt{n} \leq \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n+1}$. Ensuite, on minore $\sqrt{n}$ par 1 et on majore $\sqrt{n+1}$ par $n+1$, ce qui nous rapproche sérieusement du but.

b) Faire attention que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{x}{4}} - 1 = \frac{4}{4-x} - 1 = \frac{x}{4-x}$ et

prendre le temps d'écrire $(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{x}{4} \times n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{4}\right)^n$ afin de récupérer exactement la série géométrique dérivée.

16) On a $f(x) = \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, ce qui donne très vite la minoration demandée.

17) Ne pas oublier que, d'après la question 16), la courbe représentative de f est au dessus de la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

Partie 1

1) • Pour ceux qui ont fait une récurrence, voici la faute qui a décimé presque

tous les candidats : « $B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}$ donc $B_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+n}{4k}$ ».

En fait, avec $B_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+n}{4k}$, on a $B_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+n+1}{4k}$.

• On n'écrit pas $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$ mais $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$. Cette faute explique peut-être

la "blague" qui suit : « $\binom{2n}{n} = \frac{2}{n!}$ ».

• Un peu de vocabulaire : $n!$ n'est pas le produit de n termes, mais le produit de n facteurs. Je chipote, mais on fait des maths donc la rigueur s'impose !

• Pour la fonction Python, il ne fallait pas écrire $P=P*(n+k)/4*k$ mais plutôt $P=P*(n+k)/(4*k)$.

Partie 2

2) • Il est effarant de lire $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = 1$: il faut rester concentré même, et surtout, dans les questions faciles.

• Il est un peu bête de s'arrêter à $W_1 = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1$, mais le pire était de trouver $W_1 = -1$ (en effet, W_1 est l'intégrale, bornes dans l'ordre croissant d'une fonction positive donc $W_1 \geq 0$).

3) • Asséner sans preuve que $\sin^n t \geq \sin^{n+1} t$ est inacceptable (les correcteurs voient trop de fautes sur les inégalités alors ils sont méfiants !).

• Cela dit, il était pire d'écrire $\sin^{n+1} t - \sin^n t = \sin t$!

• Avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il n'est pas du tout question d'en déduire $\sin t > 0$: on a seulement $\sin t \geq 0$.

5) Il était maladroit d'utiliser la question 1) à cause de la faute consistant à écrire

$B_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+n}{4k}$ au lieu de $B_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+n+1}{4k}$: tout est alors fichu en l'air !

8) Avoir l'encadrement $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq B_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ et remarquer que

$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ ne permet pas de conclure sans rien d'autre que $B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ (voir les « Conseils de rédaction »).

Partie 3

9) a) • Répondre que Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre 3 est réellement affligeant. On peut juste souhaiter que ce soit une coquille...

• Il était dommage de ne pas trouver le paramètre et de ne rien tenter pour le faire.

• La bévue absolue était de trouver $V(Y_k) = 0$: rappelons que les seules variables de variance nulle sont les variables quasi certaines, ce qui n'est évidemment pas le cas ici.

c) La grosse confusion consistait à penser que $S_n(\Omega) = \llbracket -n, n \rrbracket$: en effet, S_n ne prend pas toutes les valeurs de $\llbracket -n, n \rrbracket$. Conclure tout de même que $S_n(\Omega) = \{2j - n, j \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ était une belle arnaque !

10) c) Écrire $R_n = \sum_{k=1}^n A_k$ contient deux énormités : dans le membre de droite, on a

une somme d'événements ce qui est un non-sens, et l'égalité elle-même ne veut rien dire puisque dans le membre de gauche on a une variable aléatoire et dans celui de droite une quantité qui n'a pas de sens.

11) L'erreur quasi invisible était d'affirmer que $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $[k-1, k]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ (pour $k = 1$, on a un problème de dérivabilité en 0).

12) • Une sommation interdite :

$$\ll E(R_n) = \sum_{k=1}^n B_k \text{ et } B_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \text{ donc } E(R_n) \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \gg$$

On n'ajoute pas les équivalents !

• Encadrer $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}}$ amenait à $\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

et après sommation, on trouvait $\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$, mais ça ne

dit rien de $\sum_{k=1}^n B_k$! Il fallait encadrer B_k et pas son équivalent.

Partie 4

13) a) Une des plus belles bourdes jamais écrite : $\ll \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \binom{n}{n} \gg$.

Il faut vraiment être désespéré pour écrire une chose pareille !

b) Affirmer que la série $\sum \sqrt{n\pi} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ est géométrique est une vraie imposture.

14) • Comme rappelé dans « Conseils de rédaction », ayant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$, le

programme ne nous donne pas le droit d'écrire que $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{\binom{2n}{n}}$ (alors que

les élèves des prépas scientifiques ont le droit de le faire !).

• Pire était de penser que f soit une fonction polynomiale.

• Avec $x \leq y$, il n'est pas possible (et inutile) de déduire $x^n < y^n$.

• Pour étudier les variations de la fonction f , il n'est pas suffisant de chercher le signe de $f(x+1) - f(x)$: cette technique est réservée aux suites avec la recherche du signe de $u_{n+1} - u_n$.

15) b) • Un défaut de cours suivi d'une escroquerie : $\ll \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{4}} = \frac{x}{4-x} \gg$.

• Pour $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, ce n'est pas le théorème d'encadrement qui est en jeu !

• En ce qui concerne la déduction demandée pour f en 0, la réponse n'est pas que f est prolongeable par continuité : pour ça, il aurait fallu que f ne soit pas définie en 0.

Corrigé 2025

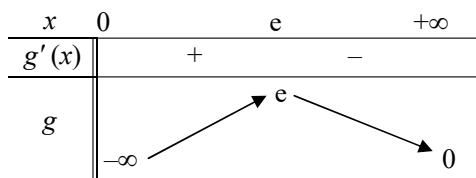
Exercice 1

1) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (quotient bien défini de fonctions dérivables) et on a : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

La fonction g' est strictement positive sur $]0, e[$ et strictement négative sur $]e, +\infty[$. On en déduit que g est strictement croissante sur $]0, e[$ et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$.

De plus, on a $g(e) = e$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(x) = -\infty$ (sans indétermination car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ par croissances comparées.

On peut résumer :



b) On sait que $e < 3$ donc, comme g décroît sur $]e, +\infty[$, elle décroît aussi sur $[3, +\infty[$, d'où : $\forall k \geq 3, g(k+1) \leq g(k)$.

Ceci s'écrit aussi :

$$\forall k \geq 3, \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

Par conséquent, la suite $\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)_{k \geq 3}$ est décroissante. On en déduit, pour tout

$k \geq 4$, que $\frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(4)}{4}$, mais comme $\frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$, on obtient

bien :

$$\forall k \in \llbracket 4, +\infty \rrbracket, \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(2)}{2}$$

2) a) La fonction polynomiale $x \mapsto x - n$ est dérivable sur $]n, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, la fonction $x \mapsto \ln(x - n)$ est dérivable sur $]n, +\infty[$.

Pour finir, f_n est dérivable sur $]n, +\infty[$ par opérations usuelles.

Pour tout réel $x > n$, on a :

$$f'_n(x) = \ln(x) + (x-n) \times \frac{1}{x} - \ln(x-n) - x \times \frac{1}{x-n}$$

En arrangeant un peu, on trouve :

$$f'_n(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}$$

b) Soit h la fonction définie par : $\forall t > 0, h(t) = \ln(t) - t + 1$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $h'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$.

On en déduit alors facilement que h est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. De ce fait, h présente un maximum en 1 donc on a : $\forall t > 0, h(t) \leq h(1)$.

Comme $h(1) = 0$, la fonction h est négative, ce qui donne :

$$\forall t > 0, \ln(t) \leq t - 1$$

Remarque. On pouvait aussi invoquer la concavité de la fonction $\ln$ et la position de sa courbe par rapport à sa tangente au point $(1, 0)$, d'équation $y = t - 1$.

Pour tout réel $x > n$, on a $\frac{x}{x-n} > 0$ donc on peut appliquer l'inégalité précédente

avec $t = \frac{x}{x-n}$, ce qui donne $\ln\left(\frac{x}{x-n}\right) \leq \frac{x}{x-n} - 1$.

Comme $f'_n(x) = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + \frac{x-n}{x} - \frac{x}{x-n}$, on obtient $f'_n(x) \leq \frac{x-n}{x} - 1$, ce qui

s'écrit : $\forall x > n, f'_n(x) \leq -\frac{n}{x}$.

Comme $x > n > 0$, on a $-\frac{n}{x} < 0$ donc $f'_n(x) < 0$ et on peut conclure que f_n est strictement décroissante sur $]n, +\infty[$.

c) Comme f_n est continue et strictement décroissante sur $[n+1, n+2]$, alors f_n réalise une bijection de $[n+1, n+2]$ sur $[f_n(n+2), f_n(n+1)]$.

On a $f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2)$, et comme l'entier $n+2$ est supérieur

ou égal à 4 (car $n \geq 2$) alors, d'après la question 1b), on a $\frac{\ln(n+2)}{n+2} \leq \frac{\ln(2)}{2}$, et

comme tout est positif, on obtient (produit en croix) : $2\ln(n+2) \leq (n+2)\ln(2)$.

On en déduit que $f_n(n+2) \leq 0$ et on a aussi $f_n(n+1) = \ln(n+1) \geq 0$ car $n+1 \geq 1$. Par conséquent, 0 appartient à $[f_n(n+2), f_n(n+1)]$ donc il existe un unique réel x_n élément de $[n+1, n+2]$ tel que $f_n(x_n) = 0$, et ainsi, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n+1, n+2]$, admet une unique solution $x_n \in [n+1, n+2]$.

3) On a $n+1 \leq x_n \leq n+2$ donc, par stricte positivité de n (car $n \geq 2$), on obtient :

$$\frac{n+1}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+2}{n}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n} = 1$, on trouve par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{x_n \underset{+\infty}{\sim} n}$$

4) a) On sait que $f_n(x_n) = 0$ donc $x_n \ln(x_n - n) = (x_n - n) \ln(x_n)$. Sachant que x_n est non nul (car supérieur ou égal à $n+1$), on obtient, en divisant par x_n :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}}$$

b) Comme $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$, alors x_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Par croissances comparées, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0}$$

On a $n+1 \leq x_n \leq n+2$ donc : $1 \leq x_n - n \leq 2$. On peut multiplier cet encadrement par $\frac{\ln(x_n)}{x_n} \geq 0$ (car $x_n \geq n+1 \geq 1$) donc $\frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq 2 \frac{\ln(x_n)}{x_n}$.

D'après la question 4a), on obtient :

$$\frac{\ln(x_n)}{x_n} \leq \ln(x_n - n) \leq 2 \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$ donc, par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n - n) = 0$.

Par continuité de l'exponentielle en 0, on a finalement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1}$$

5) a) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - n) = 1$, or $u_n = x_n - n - 1$ donc la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente, de limite nulle. Dès lors, on peut appliquer l'équivalent $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ avec $x = u_n$, ce qui donne :

$$\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$$

Pour finir, on a :

$$\frac{\ln(1+n+u_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(x_n) - \ln(n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(x_n/n)}{\ln(n)}$$

On peut alors écrire $\frac{\ln(1+n+u_n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \times \ln(x_n/n)$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$, on

a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n/n) = 0$, puis, sans indétermination : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} \times \ln(x_n/n) = 0$.

Finalement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+n+u_n)}{\ln(n)} = 1$, ce qui donne :

$$\ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

b) On a $\ln(x_n - n) = (x_n - n) \frac{\ln(x_n)}{x_n}$ donc sachant que $x_n = 1 + n + u_n$, on en déduit : $\ln(1+u_n) = (1+u_n) \frac{\ln(1+n+u_n)}{1+n+u_n}$. (1)

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+u_n) = 1$ et que $\ln(1+n+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

De plus, comme u_n tend vers 0, $1+u_n$ est négligeable devant n (car $1+u_n$ tend vers 1 et n tend vers $+\infty$) donc on a :

$$1+n+u_n \underset{+\infty}{\sim} n$$

Avec tout ceci, on obtient : $(1+u_n) \frac{\ln(1+n+u_n)}{1+n+u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$. (2)

On a donc, avec (1) et (2) :

$$\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

On a montré à la question 5a) que $\ln(1+u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$ donc, par transitivité :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

6) • Par croissance de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\forall n \geq 2, \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(2)}{n}$$

La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre $1 \leq 1$) donc par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

On sait que $x_n \geq n+1$ donc $u_n \geq 0$, et comme $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n}$, alors, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général u_n diverge.

$$\bullet \text{ On sait que } u_n \sim \frac{\ln(n)}{n} \text{ donc } u_n^2 \sim \frac{\ln(n)^2}{n^2} \quad (*)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} \frac{\ln(n)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^2}{n^{1/2}} = 0$ (par croissances comparées) on obtient : $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

La série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$ et les séries étudiées sont à termes positifs donc, par critère de

négligeabilité, on en déduit que la série de terme général $\frac{\ln(n)^2}{n^2}$ converge.

Avec (*), grâce au critère d'équivalence (toujours pour les séries à termes positifs), la série de terme général u_n^2 converge.

Exercice 2.....

1) a) Si x est élément de F , alors $p(x) = x$ (car x est son propre projeté) donc $\|p(x)\| = \|x\|$, ce qui donne bien :

$$F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$$

b) Pour tout x de E , on a $x = x - p(x) + p(x)$, or par définition d'un projecteur orthogonal, $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$, donc :

$$p(x) \perp x - p(x)$$

D'après le théorème de Pythagore appliqué à $x = (x - p(x)) + p(x)$, on déduit :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$$

c) On sait déjà que $F \subset \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$.

Montrons l'autre inclusion.

Soit x un élément de E tel que $\|p(x)\| = \|x\|$. On a, d'après la question 1b),

$\|x - p(x)\|^2 = 0$, ce qui implique $x - p(x) = 0$ donc $p(x) = x$, ce qui montre que $x \in F$. On a donc bien montré que $\{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\} \subset F$.

Par double inclusion :

$$F = \{x \in E, \|p(x)\| = \|x\|\}$$

D'après la question précédente, on a : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$

Comme $\|x - p(x)\|^2$ est positif, on en déduit : $\|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.

On a donc par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et par positivité de la norme :

$$\forall x \in E, \|x\| \geq \|p(x)\|$$

2) a) Soit $x \in F_1 \cap F_2$. Comme $x \in F_2$, on a $p_2(x) = x$ et comme $p_1 \circ p_2 = p_3$, on obtient $p_3(x) = p_1(p_2(x)) = p_1(x)$. Sachant que x est aussi dans F_1 , on a $p_1(x) = x$ et on en déduit $p_3(x) = x$, ce qui prouve que x appartient à F_3 . Ainsi, on a démontré l'inclusion :

$$F_1 \cap F_2 \subset F_3$$

b) Pour tout $x \in F_3$, on a $x = p_3(x) = (p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x))$.

On a donc $\|x\| = \|p_1(p_2(x))\|$ et comme p_1 est un projecteur orthogonal, on a, d'après la question 1c) : $\|p_1(p_2(x))\| \leq \|p_2(x)\|$, ce qui donne :

$$\forall x \in F_3, \|x\| \leq \|p_2(x)\|$$

Toujours d'après la question 1c), on a aussi $\|p_2(x)\| \leq \|x\|$ puisque p_2 est un projecteur orthogonal.

Ainsi, on a $\|x\| \leq \|p_2(x)\|$ et $\|p_2(x)\| \leq \|x\|$ donc $\|p_2(x)\| = \|x\|$, ce qui prouve que $x \in F_2$.

Pour finir, $x = p_1(p_2(x))$ donc, comme p_1 est la projection orthogonale sur F_1 , on a aussi $x \in F_1$.

On peut conclure :

$$F_3 \subset F_1 \cap F_2$$

c) Avec les questions 2a) et 2b), on vient de montrer par double inclusion que :

$$F_1 \cap F_2 = F_3$$

d) Soit $(x, y) \in E^2$. Sachant que p_3 est un projecteur orthogonal, alors, d'après le rappel de cours, p_3 est un endomorphisme symétrique et on en déduit :

$$\langle p_3(x), y \rangle = \langle x, p_3(y) \rangle$$

Comme $p_3 = p_1 \circ p_2$, ceci s'écrit : $\langle (p_1 \circ p_2)(x), y \rangle = \langle x, (p_1 \circ p_2)(y) \rangle$.

Or p_1 est un projecteur orthogonal donc p_1 est symétrique (toujours le rappel) :

$$\langle x, (p_1 \circ p_2)(y) \rangle = \langle p_1(x), p_2(y) \rangle$$

On a donc :

$$\langle (p_1 \circ p_2)(x), y \rangle = \langle p_1(x), p_2(y) \rangle \quad (1)$$

De même, comme p_2 est symétrique, on a :

$$\begin{array}{c} \text{symétrie du } p_1 \\ \downarrow \\ \langle p_1(x), p_2(y) \rangle \end{array} = \begin{array}{c} \text{symétrie du } p_2 \\ \downarrow \\ \langle p_2(y), p_1(x) \rangle \end{array} = \begin{array}{c} \text{symétrie du } p_3 \\ \downarrow \\ \langle y, (p_2 \circ p_1)(x) \rangle \end{array} = \langle (p_2 \circ p_1)(x), y \rangle$$

On a donc :

$$\langle p_1(x), p_2(y) \rangle = \langle (p_2 \circ p_1)(x), y \rangle \quad (2)$$

Avec (1) et (2), on conclut :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle (p_1 \circ p_2)(x), y \rangle = \langle (p_2 \circ p_1)(x), y \rangle$$

e) Par bilinéarité du produit scalaire, ce qui précède s'écrit $\langle (p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x), y \rangle = 0$ et c'est valable pour tout y de E donc en particulier pour $y = (p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x)$, ce qui donne :

$$\|(p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x)\|^2 = 0$$

On en déduit que $(p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x) = 0_E$ (par propriété de la norme).

On a donc $(p_1 \circ p_2)(x) = (p_2 \circ p_1)(x)$ et ceci est vrai pour tout vecteur x de E , ce qui permet de conclure :

$$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$$

Remarque. Avec $\langle (p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x), y \rangle = 0$ qui est valable pour tout y de E , on pouvait écrire $(p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x) \in E^\perp$, ce qui signifie $(p_1 \circ p_2)(x) - (p_2 \circ p_1)(x) = 0_E$.

3) a) • L'application p est un endomorphisme de E (comme composée bien définie de deux endomorphismes de E).

• Par associativité de la loi de composition, on a $p^2 = (p_1 \circ p_2) \circ (p_1 \circ p_2) = p_1 \circ (p_2 \circ p_1) \circ p_2$, mais $p_2 \circ p_1 = p_1 \circ p_2$ (hypothèse de cette question) donc, toujours par associativité :

$$p^2 = p_1 \circ (p_1 \circ p_2) \circ p_2 = (p_1 \circ p_1) \circ (p_2 \circ p_2)$$

On a donc $p^2 = p_1^2 \circ p_2^2 = p_1 \circ p_2$ car p_1 et p_2 sont des projecteurs.

On trouve ainsi $p^2 = p$, et par conséquent, p est un projecteur de E .

b) Soit $(x, y) \in E^2$.

On a $\langle p(x), y \rangle = \langle (p_1 \circ p_2)(x), y \rangle = \langle p_1(p_2(x)), y \rangle = \langle p_2(x), p_1(y) \rangle$ car p_1 est un projecteur orthogonal donc symétrique d'après le rappel de cours. On continue en utilisant maintenant le fait que p_2 est symétrique, ce qui donne :

$$\langle p(x), y \rangle = \langle p_2(x), p_1(y) \rangle \stackrel{\substack{p_2 \text{ est} \\ \text{symétrique}}}{=} \langle x, p_2(p_1(y)) \rangle = \langle x, (p_2 \circ p_1)(y) \rangle$$

Or $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ donc : $\langle p(x), y \rangle = \langle x, (p_1 \circ p_2)(y) \rangle = \langle x, p(y) \rangle$.

En conclusion, p est un endomorphisme symétrique de E .

c) L'application p est un projecteur et un endomorphisme symétrique donc c'est un projecteur orthogonal d'après le rappel de cours.

Ici, p joue le rôle de p_3 (on a $p = p_1 \circ p_2$ tout comme $p_3 = p_1 \circ p_2$) qui est la projection orthogonale sur F_3 , mais, d'après la question 2c), on a $F_1 \cap F_2 = F_3$, donc p est la projection orthogonale sur $F_1 \cap F_2$.

4) Si p_1 et p_2 sont deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E (respectivement sur F_1 et F_2), alors on a l'équivalence :

$p_1 \circ p_2$ est un projecteur orthogonal de E si, et seulement si, $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

De plus, dans ce cas, $p_1 \circ p_2$ est la projection orthogonale sur $F_1 \cap F_2$.

Exercice 3.....

Partie 1

1) • Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $-2x \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$ (car l'exponentielle est positive).

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = 0 \geq 0$.

Ainsi, f est positive sur $\mathbb{R}$.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_-$ (comme produit d'une fonction polynomiale et d'une exponentielle composée avec une fonction polynomiale) et elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction nulle.

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

• La fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 0.

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_-$, $\int_x^0 f(t) dt = \int_x^0 -2t e^{-t^2} dt = \left[e^{-t^2} \right]_x^0 = 1 - e^{-x^2}$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x^2}) \stackrel{u=x^2}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (1 - e^{-u}) = 1$, on peut conclure que $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ converge et vaut 1.

Par définition de la convergence d'une intégrale deux fois impropre, on a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 + 0 = 1$.

• Les 3 points précédents prouvent que f peut être considérée comme une densité.

2) Par définition, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

• Si $x \in \mathbb{R}_-$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x -2t e^{-t^2} dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[e^{-t^2} \right]_A^x$ et on trouve :

$$F(x) = \lim_{A \rightarrow -\infty} (e^{-x^2} - e^{-A^2}) = e^{-x^2}$$

• Si $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$ et on obtient :

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x 0 dt = 1 + 0 = 1$$

En résumé :

$$F(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3) D'après le cours, la densité la plus usuelle d'une variable T suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est la fonction $f_T : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

4) La variable aléatoire X possède une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge absolument, ce qui revient à la convergence de

$\int_{-\infty}^0 t f(t) dt$ (puisque f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et positive sinon), c'est-à-dire à la convergence de $\int_{-\infty}^0 -2t^2 e^{-t^2} dt$.

Cette dernière intégrale fait penser au moment d'ordre 2 de la variable aléatoire T qui existe et est donné par :

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_T(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

Par parité de la fonction intégrée, on a :

$$E(T^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 t^2 e^{-t^2} dt$$

De plus, grâce au théorème de Koenig-Huygens, on a $V(T) = E(T^2) - E(T)^2$ donc $E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = \frac{1}{2} + 0^2 = \frac{1}{2}$.

Finalement, on obtient $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$, d'où :

$$\int_{-\infty}^0 t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

On en déduit que $\int_{-\infty}^0 -2t^2 e^{-t^2} dt$ converge (intégrale proportionnelle à l'intégrale précédente) et vaut $-2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{4} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On peut conclure que X possède une espérance :

$$E(X) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5) • Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, $G(x) = P(X^2 \leq x) = 0$ car X^2 prend des valeurs positives.

• Si $x \in \mathbb{R}_+$, $G(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \overset{\substack{\text{car } X \text{ est} \\ \text{à densité}}}{\downarrow} F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$.

Comme F est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}_+$ (c'est vrai, même en 0), on obtient :

$$G(x) = 1 - F(-\sqrt{x})$$

Sachant que $-\sqrt{x}$ est négatif, on a $F(-\sqrt{x}) = e^{-(\sqrt{x})^2} = e^{-x}$, ce qui donne :

$$G(x) = 1 - e^{-x}$$

On a donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, ce qui prouve que Z suit la loi exponentielle de paramètre 1.

6) La variable $Z = X^2$ admet une espérance qui vaut 1 (d'après la question précédente), donc X admet un moment d'ordre 2 : $E(X^2) = E(Z) = 1$.

Ainsi, X admet une variance qui vaut, d'après le théorème de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

7) Comme X est négative et comme $X^2 = Z$, alors $X = -\sqrt{Z}$.

Voici les deux fonctions demandées :

```
def simulX(n):
    M=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        Z=rd.exponential(1)
        M[i]=-Z**(1/2)
    return M
```

Remarque 1. On pouvait écrire $M[i] = -np.sqrt(Z)$.

Remarque 2. On pouvait remplacer les deux lignes de la boucle `for` par la seule ligne : $M[i] = -(rd.exponential(1) ** (1/2))$.

```
def EsperanceX(n):
    S=0
    L=simulX(n)
    for i in range(n):
        S=S+L[i]
    return S/n
```

Partie 2

8) • La fonction h est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ donc positive sur ces intervalles. De plus, si x appartient à $[0, 1]$, alors $1-x$ aussi donc $h(x) \geq 0$.

Par conséquent, h est positive.

• La fonction h est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$ car constante sur ces intervalles. Sur $]0, 1[$, h est une fonction polynomiale donc elle est continue.

Ainsi, h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

• La fonction h étant nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^0 h(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} h(t) dt$ convergent et sont nulles.

$$\text{De plus, } \int_0^1 h(t) dt = 2 \int_0^1 (1-t) dt = 2 \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1$$

On a donc montré que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ converge et vaut 1.

• Les trois points précédents prouvent que h peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire.

9) • Si $x < 0$, $H(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

• Si $x \in [0, 1]$, $H(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2(1-t) dt = 2 \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = 2x - x^2$.

• Si $x > 1$, $H(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 2(1-t) dt + \int_1^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1$.

Résumé :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

10) Pour tout réel x , on a : $F_n(x) = P(T_n \leq x) = P(\sqrt{n}(M_n - 1) \leq x)$.

Comme $\sqrt{n} > 0$, on obtient : $F_n(x) = P\left(M_n - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = P\left(M_n \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

Comme $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$, on a, de la même façon qu'à la question 3a) de l'exercice 1 de l'épreuve 2022 :

$$\left(M_n \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \bigcap_{k=1}^n \left(Y_k \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

Par indépendance, on trouve : $F_n(x) = \prod_{k=1}^n P\left(Y_k \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

Les variables $Y_1, \dots, Y_n$ ayant même loi que Y , leur fonction de répartition commune est H et on a finalement :

$$F_n(x) = \left[H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \right]^n$$

11) Dès que n est assez grand, on a $1 + \frac{y}{n} > 0$ et on a le droit d'écrire :

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y}{n} = 0$, on dispose de l'équivalent $\ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{y}{n}$ (valable même si

$y = 0$) et on obtient $n \ln\left(1 + \frac{y}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y$.

On conclut, par continuité de la fonction exponentielle en y :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = e^y$$

12) • Si $x > 0$, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a $1 + \frac{x}{\sqrt{n}} > 1$ donc

$H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 1$, et ainsi $F_n(x) = 1$, d'où :

$$\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 1$$

• Si $x \leq 0$, alors $1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \leq 1$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 1$, on est sûr qu'à partir

d'un certain rang, on a $1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \geq 0$.

Ainsi, pour n assez grand, on a $0 \leq 1 + \frac{x}{\sqrt{n}} \leq 1$ donc :

$$H\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{n}$$

On en déduit, toujours pour n assez grand : $\forall x \leq 0, F_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$.

D'après la question 11), on obtient :

$$\forall x \leq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = e^{-x^2}$$

Finalement, pour tout réel x , on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$ donc la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

Problème

Partie 1

1) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$B_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n!} \times \frac{1}{n!}$$

On en déduit :

$$B_n = \frac{1}{4^n} \times 2n \times (2n-1) \times \dots \times (n+2) \times (n+1) \times \frac{1}{n \times (n-1) \times \dots \times 1}$$

En réécrivant différemment :

$$B_n = \frac{1}{4^n} \times \frac{(n+1) \times (n+2) \times \dots \times (n+n)}{1 \times 2 \times \dots \times n} = \frac{1}{4^n} \prod_{k=1}^n \frac{n+k}{k}$$

Comme $4^n = \prod_{k=1}^n 4$, on trouve bien :

$$B_n = \prod_{k=1}^n \frac{n+k}{4k}$$

Cette égalité est aussi vraie pour $n=0$ puisqu'elle donne $1=1$ grâce à la convention proposée par l'énoncé.

On peut alors proposer la fonction Python suivante :

```
def B(n):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*(n+k)/(4*k)
    return P
```

Partie 2

$$2) W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1.$$

3) Pour tout entier naturel n , on a, par linéarité de l'intégration :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (\sin t - 1) dt$$

Comme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \sin t \leq 1$, la fonction intégrée est négative et les bornes sont dans l'ordre croissant, ce qui fait que l'intégrale est négative. On en déduit que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4) Dans l'intégrale définissant W_{n+2} , on pose : $u(t) = (\sin t)^{n+1}$ et $v'(t) = \sin t$.

On peut alors choisir $v(t) = -\cos t$ et on a : $u'(t) = (n+1)(\sin t)^n \cos t$.

Les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$, l'intégration par parties est licite et on trouve :

$$W_{n+2} = [-\cos t (\sin t)^{n+1}]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \cos^2 t dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \cos^2 t dt$$

(le crochet est nul car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $(\sin 0)^{n+1} = 0^{n+1} = 0$, puisque $n+1 \geq 1 > 0$).

Grâce à la relation la plus connue de la trigonométrie, on trouve :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (1 - \sin^2 t) dt$$

En développant dans l'intégrale et par linéarité de l'intégration, on a :

$$W_{n+2} = (n+1) \left(\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt - \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+2} dt \right) = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

On a donc $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ et on obtient :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

Comme $n+2 \neq 0$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

5) On va montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \text{ et } W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$$

• Pour $n=0$, on a $B_0=1$ et $W_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2} B_0$, ce qui initialise la première relation.

On a aussi $W_1 = 1$ et $\frac{1}{(2 \times 0 + 1)B_0} = 1$, ce qui initialise la deuxième relation.

• On suppose les deux relations vraies pour un certain entier naturel n .

$$\rightarrow \text{On a alors } W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{2n+1}{2n+2} B_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

En multipliant haut et bas par $(2n+2)$, on obtient, grâce à $(2n+2)^2 = 4(n+1)^2$:

$$W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)(2n+2)} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{4 \times 4^n (n+1)^2 (n!)^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2}$$

On trouve bien :

$$W_{2n+2} = \frac{\pi}{2} B_{n+1}$$

$$\rightarrow \text{On a aussi } W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{1}{(2n+1)B_n} \text{ donc :}$$

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{(2n+3)(2n+1)} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Toujours en multipliant haut et bas par $(2n+2)$, on obtient de même :

$$W_{2n+3} = \frac{(2n+2)(2n+2)}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{(2n+3)} \times \frac{4^{n+1} ((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$$

On trouve bien :

$$W_{2n+3} = \frac{1}{(2n+3)B_{n+1}}$$

• On a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{\pi}{2} B_n \text{ et } W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)B_n}$$

6) Pour tout entier naturel n non nul, on a $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$. Comme $2n \neq 0$

(car $n \in \mathbb{N}^*$), on peut écrire $W_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} W_{2n+1}$, ce qui donne, d'après la question

précédente : $W_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} \times \frac{1}{(2n+1)B_n}$.